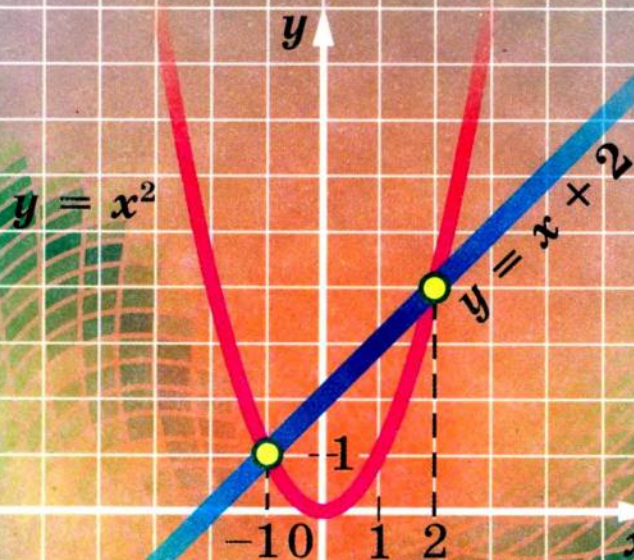


А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

8

АЛГЕБРА





«Моя любов — Україна і математика» — выгравировано на гранитном постаменте памятника ученому Михаилу Филипповичу Кравчуку (1892–1942).

Мы надеемся, что это патриотическое высказывание выдающегося украинского математика станет для вас надежным ориентиром на пути к профессионализму.

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степени чисел 2 и 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Свойства степени с целым показателем

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

Свойства арифметического квадратного корня

$$\text{Если } a \geq 0, \text{ то } (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\text{Для любого действительного } a \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{Если } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0, \text{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\text{Если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Формула корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ДОРОГИЕ ВОСЬМИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а следовательно, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хочется верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на три параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Самые важные сведения выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно отмеченные «звездочкой» (*)).

Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Каждый пункт завершается рубрикой «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные алгебраические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

УЧИТЕЛЯМ

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

Условные обозначения

- n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;
- $n^{\cdot}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;
- n^{**} задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;
- n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;
-  окончание доказательства теоремы, решения задачи;
-  задания, которые можно выполнять с помощью компьютера;
-  рубрика «Когда сделаны уроки».

Зеленым цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса (на усмотрение учителя) можно решать устно.

- В этом параграфе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби; познакомитесь с уравнениями, составленными с помощью этих дробей.
- Вы узнаете, с помощью каких правил можно заменить данное уравнение более простым.
- Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в такое же количество раз.

1. Рациональные дроби

Перед изучением этого пункта рекомендуем повторить содержание п. 1 на с. 231 и п. 6 на с. 233.

В курсе алгебры 7 класса были рассмотрены целые выражения, то есть выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений:

$$x - y, \frac{a+b}{5}, m^2 + 2m + n^2, \frac{1}{3}x - 4, \frac{c}{4} + \frac{d}{7}, x : 5, y, 7.$$

В курсе алгебры 8 класса мы рассмотрим **дробные выражения**. Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведем примеры дробных выражений:

$$2x + \frac{a}{b}, (x - y) : (x + y), \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \frac{5}{x}.$$

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль.*

Например, выражение $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, то есть числового значения этого выражения при $a = 1$ не существует. При всех других значениях a это выражение имеет смысл.

Определение. Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Например, в рассмотренном выше выражении допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 1.

Допустимыми значениями переменных, входящих в целое выражение, являются все числа.

Отдельным видом рационального выражения является **рациональная дробь**. Это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены¹. Так, рациональные выражения

$$\frac{x}{7}, \frac{x^2 - 2xy}{x + y}, \frac{12}{a}, \frac{a + b}{5}$$

являются примерами рациональных дробей.

Отметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, то есть многочленом, тождественно равным нулю.

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональную дробь, являются все те значения переменных, при которых значение знаменателя дроби не равно нулю.

Схема на рисунке 1 иллюстрирует связь между понятиями, которые рассматриваются в этом пункте.



Рис. 1

¹ Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов (см. п. 6 на с. 233–234).

ПРИМЕР Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-5}$.

Решение

Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях x , кроме $x = 0$,

а дробь $\frac{3}{x-5}$ имеет смысл при всех значениях x , кроме $x = 5$.

Следовательно, искомыми допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от 0 и 5. ▲



1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Как вместе называют целые и дробные выражения?
3. Какие значения переменных называют допустимыми?
4. Какие дроби называют рациональными?
5. Отдельным видом каких выражений являются рациональные дроби?
6. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

УПРАЖНЕНИЯ

1.° Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a - \frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ являются:

- 1) целыми выражениями;
- 2) дробными выражениями;
- 3) рациональными дробями?

2.° Чему равно значение дроби $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, если:

- 1) $c = -3$;
- 2) $c = 0$?

3.° Найдите значение выражения $\frac{2m-n}{3m+2n}$, если:

- 1) $m = -1$, $n = 1$;
- 2) $m = 4$, $n = -5$.

4.° Чему равно значение выражения:

- 1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a = -4$;
- 2) $\frac{x+3}{y} - \frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

5.° Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение:

1) $2x - 5$;

5) $\frac{2+y}{1+y}$;

9) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$;

2) $\frac{18}{m}$;

6) $\frac{1}{x^2+4}$;

10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;

3) $\frac{9}{x-5}$;

7) $\frac{5}{x^2-4}$;

11) $\frac{x}{|x|+1}$;

4) $\frac{x-5}{9}$;

8) $\frac{5}{|x|-4}$;

12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6.° При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{9}{y}$;

3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;

5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$;

4) $\frac{x}{|x|-3}$;

6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

7.* Запишите рациональную дробь, которая содержит переменную x и имеет смысл при всех значениях x , кроме:

1) $x = 7$;

2) $x = -1$;

3) $x = 0$ и $x = 4$.

8.* Запишите рациональную дробь, содержащую переменную y , допустимыми значениями которой являются:

1) все числа, кроме 5;

3) все числа, кроме 3, -3 и 6;

2) все числа, кроме -2 и 0;

4) все числа.

9.* Автомобиль проехал по шоссе a км со скоростью 75 км/ч и по грунтовой дороге b км со скоростью 40 км/ч. За какое время автомобиль проехал весь путь? Составьте выражение и найдите его значение при $a = 150$, $b = 20$.

10.* Ученик купил тетради по 8 грн, заплатив за них m грн, и по 14 грн, заплатив за них n грн. Сколько тетрадей купил ученик? Составьте выражение и найдите его значение при $m = 24$, $n = 56$.

11.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{1}{x^2}$ положительное;

2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное.

12.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное.

13.* Известно, что $5x - 15y = 1$. Найдите значение выражения:

1) $x - 3y$;

3) $\frac{18y - 6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x - 6y}$;

4) $\frac{1}{x^2 - 6xy + 9y^2}$.

14.* Известно, что $4a + 8b = 10$. Найдите значение выражения:

1) $2b + a$;

2) $\frac{5}{a + 2b}$;

3) $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{2a + 4b}$.

15.* Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$;

2) $y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$.

16.* При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{x}{x - \frac{x}{x}}$;

2) $\frac{10}{2 + \frac{6}{x}}$?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

17. Сократите дробь:

1) $\frac{5}{15}$;

2) $\frac{12}{18}$;

3) $\frac{27}{45}$;

4) $\frac{30}{48}$.

18. Приведите дробь:

1) $\frac{3}{7}$ к знаменателю 14;

2) $\frac{8}{15}$ к знаменателю 60.

19. Представьте в виде степени выражение:

1) $a^5 a^3$;

2) $(a^5)^3$;

3) $a^5 : a^3$;

4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

20. Разложите на множители:

1) $6a - 15b$;

5) $a^6 + a^2$;

2) $2a + ab$;

6) $12m^2n - 4mn$;

3) $7am + 7bn$;

7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;

4) $4x^2 - 12xy$;

8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Представьте в виде произведения выражение:

1) $ab - ac + bd - cd$;

3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;

2) $3m + 3n - mx - nx$;

4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;

3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;

2) $9x^2 + 6x + 1$;

4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Разложите на множители:

- | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| 1) $x^2 - 9$; | 4) $a^2b^2 - 81$; | 7) $c^3 - d^3$; |
| 2) $25 - 4y^2$; | 5) $100m^6 - 1$; | 8) $a^3 + 8$; |
| 3) $36m^2 - 49n^2$; | 6) $a^{10} - b^6$; | 9) $27m^6 - n^9$. |

24. Разложите на множители:

- | | |
|---------------------|--------------------------------|
| 1) $7a^2 - 7$; | 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$; |
| 2) $3b^3 - 3b$; | 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$; |
| 3) $2x^3 - 2xy^2$; | 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$. |

25. Какое из равенств является тождеством:

- 1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
 2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

Повторите содержание п. 2 на с. 231.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

26. Даны два числа: $a = \underbrace{44\dots4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33\dots3}_{n \text{ цифр}}$. Можно ли подобрать

такие m и n , чтобы:

- 1) число a было делителем числа b ;
 2) число b было делителем числа a ?

2. Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях a .

Равенство $\frac{3a-1+2a+5}{a+1} = \frac{5a+4}{a+1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях a . При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют смысла.

Уточним принятые в 7 классе определение тождественно равных выражений и определение тождества.

Определение. Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют **тождественно равными**.

Определение. Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют **тождеством**.

Например, равенство $\frac{a-2}{a-2} = 1$ является тождеством, поскольку оно выполняется при всех допустимых значениях a , то есть при всех a , кроме $a = 2$.

В 7 классе мы рассматривали тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

где a , b и m — некоторые числа, причем $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения:

если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

где A , B и C — многочлены, причем многочлены B и C ненулевые.

В соответствии с этим свойством выражение $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можно заменить на тождественно равную ему дробь $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель C .

ПРИМЕР 1 Сократите дробь: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Решение. 1) Одночлены $6a^3b^2$ и $24a^2b^4$ имеют общий множитель $6a^2b^2$. Тогда можно записать:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель $y + 2$, получаем:

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}. \quad \blacktriangle$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \quad \text{и} \quad \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, то есть

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

ПРИМЕР 2 Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 3 Приведите дробь:

- 1) $\frac{a^2}{5bc^3}$ к знаменателю $15ab^3c^5$;
- 2) $\frac{a}{a+2b}$ к знаменателю $a^2 - 4b^2$;
- 3) $\frac{a-b}{2a-3b}$ к знаменателю $3b - 2a$.

Решение. 1) Поскольку $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, то новый знаменатель отличается от знаменателя данной дроби множителем $3ab^2c^2$. Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби надо умножить на **дополнительный множитель** $3ab^2c^2$. Имеем:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

$$2) \text{ Запишем: } \frac{a}{a+2b} = \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} = \frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}.$$

3) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на число -1 , получаем:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b) \cdot (-1)}{(2a-3b) \cdot (-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 4 Приведите к общему знаменателю дроби:

$$1) \frac{2m}{9a^2b^6} \text{ и } \frac{5n^2}{6a^4b^3}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ и } \frac{1}{a-b}; \quad 3) \frac{4a^2}{a^2-36} \text{ и } \frac{6}{a^2+6a}.$$

Решение. 1) Можно принять за общий знаменатель данных дробей произведение их знаменателей, равное $54a^6b^9$. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен $18a^4b^6$, сконструированный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 знаменателей данных дробей, а каждая из переменных a и b взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Поскольку $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем для дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, получаем, что дополнительным множителем для дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ является одночлен $3b^3$.

Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2m}{9a^2b^6} &= \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6}; \\ \frac{5n^2}{6a^4b^3} &= \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}. \end{aligned}$$

2) Здесь общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2}; \\ \frac{1}{a-b} &= \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

3) Чтобы найти общий знаменатель рациональных дробей, бывает полезным предварительно разложить их знаменатели на множители:

$$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6), \quad a^2 + 6a = a(a + 6).$$

Следовательно, общим знаменателем данных дробей может служить выражение $a(a + 6)(a - 6)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{4a^2}{a^2-36} &= \frac{a/4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a}; \\ \frac{6}{a^2+6a} &= \frac{a^{-6}/6}{a(a+6)} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5 Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Решение. Данная функция определена при всех значениях x , кроме 1. Имеем:

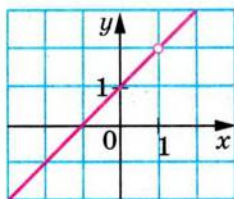


Рис. 2

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1,$$

то есть $y = x + 1$, где $x \neq 1$.

Следовательно, искомым графиком являются все точки прямой $y = x + 1$, за исключением одной точки, абсцисса которой равна 1 (рис. 2). ▲

ПРИМЕР 6 Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 9)x = a + 3$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$ и рассмотрим три случая.

1) $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, которое не имеет корней.

2) $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

3) $a \neq 3$ и $a \neq -3$.

$$\text{Тогда } x = \frac{a + 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{1}{a - 3}.$$

Ответ: если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a - 3}$. ▲



1. Какие выражения называют тождественно равными?

2. Что называют тождеством?

3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

УПРАЖНЕНИЯ

27.° Какому из приведенных выражений тождественно равна

дробь $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$;

2) $\frac{a}{4}$;

3) $\frac{12a^3}{48a}$;

4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

28.° Является ли тождеством равенство:

$$1) \frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7};$$

$$3) \frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5};$$

$$2) \frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4};$$

$$4) \frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}?$$

29.° Сократите дробь:

$$1) \frac{14a^3}{21a};$$

$$3) \frac{5x}{20x};$$

$$5) \frac{4abc}{16ab^4};$$

$$7) \frac{-10n^{10}}{5n^4};$$

$$2) \frac{8b^3c^2}{12bc^3};$$

$$4) \frac{24x^2y^2}{32xy};$$

$$6) \frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}};$$

$$8) \frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}.$$

30.° Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

$$1) 6a : (18a^5);$$

$$2) 16b^7 : (48b^4);$$

$$3) 35a^8b^6 : (-49a^6b^8).$$

31.° Сократите дробь:

$$1) \frac{3x}{21y};$$

$$3) \frac{5c^4}{10c^5};$$

$$5) \frac{16ab^4}{40ab^2};$$

$$7) \frac{12a^8}{-42a^2};$$

$$2) \frac{5x^2}{6x};$$

$$4) \frac{2m^4}{m^3};$$

$$6) \frac{63x^5y^4}{42x^4y^5};$$

$$8) \frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}.$$

32.° Упростите выражение:

$$1) \frac{-a}{-b};$$

$$2) \frac{-a}{b};$$

$$3) \frac{-a}{-b};$$

$$4) \frac{-a}{-b}.$$

33.° Восстановите равенства:

$$1) \frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{5b} = \frac{4a^2c^3}{\quad};$$

$$2) \frac{m}{n} = \frac{4m}{\quad} = \frac{\quad}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}.$$

34.° Приведите дробь:

$$1) \frac{a}{b^3} \text{ к знаменателю } b^5;$$

$$3) \frac{6}{7x^2y} \text{ к знаменателю } 35x^3y^2;$$

$$2) \frac{m}{9n} \text{ к знаменателю } 27n^4;$$

$$4) \frac{5k}{6p^5} \text{ к знаменателю } 24p^9c.$$

35.° Приведите дробь:

$$1) \frac{x}{y^2} \text{ к знаменателю } y^8;$$

$$3) \frac{9}{4m^2n} \text{ к знаменателю } 12m^3n^2;$$

$$2) \frac{a}{3b} \text{ к знаменателю } 6b^3;$$

$$4) \frac{11c}{15a^6} \text{ к знаменателю } 30bd^7.$$

36.° Сократите дробь:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$;

5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;

9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;

6) $\frac{4a-20b}{12ab}$;

10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;

7) $\frac{6x+12}{6x}$;

11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;

8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;

12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

37.° Сократите дробь:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;

3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;

5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;

4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;

6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

38.° Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;

4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;

7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;

5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;

8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$;

6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;

9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

39.° Приведите дробь:

1) $\frac{a}{a+2}$ к знаменателю $4a+8$;

2) $\frac{m}{m-3n}$ к знаменателю m^2-9n^2 ;

3) $\frac{x}{2x-y}$ к знаменателю $7y-14x$;

4) $\frac{5b}{2a+3b}$ к знаменателю $4a^2+12ab+9b^2$;

5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ к знаменателю x^3-1 .

40.° Представьте выражение $x-5y$ в виде дроби со знаменателем:

1) 2;

2) x ;

3) $4y^3$;

4) x^2-25y^2 .

41.° Приведите дробь $\frac{6}{b-4}$ к знаменателю:

1) $5b-20$;

2) $12-3b$;

3) b^2-4b ;

4) b^2-16 .

42.° Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

$$1) \frac{1}{8ab} \text{ и } \frac{1}{2a^3};$$

$$5) \frac{x}{2x+1} \text{ и } \frac{x}{3x-2};$$

$$2) \frac{3x}{7m^3n^3} \text{ и } \frac{4y}{3m^2n^4};$$

$$6) \frac{a-b}{3a+3b} \text{ и } \frac{a}{a^2-b^2};$$

$$3) \frac{a+b}{a-b} \text{ и } \frac{2}{a^2-b^2};$$

$$7) \frac{3a}{4a-4} \text{ и } \frac{2a}{5-5a};$$

$$4) \frac{3d}{m-n} \text{ и } \frac{8p}{(m-n)^2};$$

$$8) \frac{7a}{b-3} \text{ и } \frac{c}{9-b^2}.$$

43.° Приведите к общему знаменателю дроби:

$$1) \frac{4}{15x^2y^2} \text{ и } \frac{1}{10x^3y};$$

$$5) \frac{x+1}{x^2-xy} \text{ и } \frac{y-1}{xy-y^2};$$

$$2) \frac{c}{6a^4b^5} \text{ и } \frac{d}{9ab^2};$$

$$6) \frac{6a}{a-2b} \text{ и } \frac{3a}{a+b};$$

$$3) \frac{x}{y-5} \text{ и } \frac{z}{y^2-25};$$

$$7) \frac{1+c^2}{c^2-16} \text{ и } \frac{c}{4-c};$$

$$4) \frac{m+n}{m^2-mn} \text{ и } \frac{2m-3n}{m^2-n^2};$$

$$8) \frac{2m+9}{m^2+5m+25} \text{ и } \frac{m}{m-5}.$$

44.° Сократите дробь:

$$1) \frac{(3a+3b)^2}{a+b};$$

$$3) \frac{xy+x-5y-5}{4y+4};$$

$$2) \frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2};$$

$$4) \frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}.$$

45.° Сократите дробь:

$$1) \frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2};$$

$$2) \frac{a^3-8}{ab-a-2b+2};$$

$$3) \frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}.$$

46.° Найдите значение дроби, предварительно сократив ее:

$$1) \frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}, \text{ если } a = -2, b = 0,4;$$

$$2) \frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}, \text{ если } b = \frac{1}{3}, c = -6;$$

$$3) \frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}, \text{ если } x = 1,2, y = -3;$$

$$4) \frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}, \text{ если } a = -0,1.$$

47.* Найдите значение выражения:

1) $\frac{16x^2 - 4y^2}{6x - 3y}$ при $x = 2,5$, $y = -2$;

2) $\frac{49c^2 - 9}{49c^2 + 42c + 9}$ при $c = -4$.

48.* Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ и $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ и $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ и $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ и $\frac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ и $\frac{ab}{4a-4c}$.

49.* Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ и $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ и $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

50.* Найдите значение выражения $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, если $\frac{x}{y} = 2$.

51.* Найдите значение выражения $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, если $\frac{a}{b} = 5$.

52.* Известно, что $2a - 6b = 1$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{8}{a-3b}$;

2) $\frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}$.

53.* Найдите значение выражения $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$, если $4m + 3n = 8$.

54.* Существует ли такое значение a , при котором дробь $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ принимает отрицательное значение?

55.* Постройте график функции:

1) $y = \frac{x^2-4}{x+2}$;

3) $y = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2-4x}{x}$;

2) $y = \frac{x-3}{3-x}$;

4) $y = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+4}$.

56.* Постройте график функции:

$$1) y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}; \quad 2) y = x - \frac{x}{x}; \quad 3) y = \frac{x^2 - 3x}{x} - \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 1}.$$

57.* Постройте график функции:

$$1) y = \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}.$$

58.* Решите уравнение:

$$1) \frac{x+1}{x+1} = 1; \quad 2) \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10; \quad 3) \frac{x+6}{|x| - 6} = 0.$$

59.* Решите уравнение:

$$1) \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8; \quad 2) \frac{|x| - 7}{x - 7} = 0.$$

60.* Для каждого значения a решите уравнение:

$$1) ax = 1; \quad 3) (a - 6)x = a^2 - 12a + 36; \\ 2) ax = a; \quad 4) (a^2 - 4)x = a - 2.$$

61.* Для каждого значения a решите уравнение:

$$1) (a + 3)x = 3; \quad 2) (a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

62. Упростите выражение:

$$1) (x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x); \\ 2) (a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5); \\ 3) (y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6); \\ 4) (2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y); \\ 5) (x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3); \\ 6) (y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2.$$

63. Постройте график функции:

$$1) y = 2; \quad 2) y = 2x; \quad 3) y = 2x - 1.$$

64. Какое наименьшее значение и при каких значениях a и b принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

65. Расстояние от села Вишневое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневого до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишневое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневого до станции, на 5 мин больше, причем скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

66. Выполните действия:

$$1) \frac{7}{18} + \frac{5}{18}; \quad 2) \frac{9}{16} + \frac{7}{16}; \quad 3) \frac{23}{32} - \frac{15}{32}; \quad 4) 4 - 1\frac{3}{11}.$$

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

67. На сторонах квадрата записаны четыре натуральных числа. В каждой вершине квадрата записано число, равное произведению чисел, записанных на сторонах, для которых эта вершина является общей. Сумма чисел, записанных в вершинах, равна 55. Найдите сумму чисел, записанных на сторонах квадрата.

3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

ПРИМЕР 1 Выполните вычитание:

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2}; \quad 2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25}; \quad 3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}.$$

Решение.

$$1) \frac{7x-5}{8x^2} - \frac{3x-5}{8x^2} = \frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2} = \frac{7x-5-3x+5}{8x^2} = \frac{4x}{8x^2} = \frac{1}{2x}.$$

$$2) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25} =$$

$$= \frac{y^2-10y+25}{y^2-25} = \frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)} = \frac{y-5}{y+5}.$$

$$3) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} = \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 2 Известно, что $\frac{m}{n} = -3$. Найдите значение выражения

$$\frac{2m+n}{m}.$$

Решение. Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n} = -3$, то $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 3 Найдите все натуральные значения n , при которых значение выражения $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ является целым числом.

Решение. Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Выражение $2n + 3$ принимает натуральные значения при любом натуральном n . Поэтому выражение $2n + 3 - \frac{15}{n}$ принимает целые значения, если значения выражения $\frac{15}{n}$ являются целыми числами. Это возможно только при следующих натуральных значениях n : 1, 3, 5, 15.

Ответ: $n = 1$, или $n = 3$, или $n = 5$, или $n = 15$. $\blacktriangle$



1. Как сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?
2. Как вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?

УПРАЖНЕНИЯ

68.° Выполните действия:

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6}$;

2) $\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$;

3) $\frac{m}{n} + \frac{4m}{n}$;

4) $\frac{6c}{d} - \frac{2c}{d}$;

5) $\frac{m+n}{6} - \frac{m-2n}{6}$;

6) $\frac{2a-3b}{6ab} + \frac{9b-2a}{6ab}$;

7) $-\frac{5c+4d}{cd} + \frac{4d+9c}{cd}$;

8) $\frac{8m+3}{10m^2} - \frac{2m+3}{10m^2}$.

69.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7k}{18p} - \frac{4k}{18p}$;

2) $\frac{a-b}{2b} - \frac{a}{2b}$;

3) $-\frac{a-12b}{27a} + \frac{a+15b}{27a}$;

4) $\frac{x-7y}{xy} - \frac{x-4y}{xy}$;

5) $\frac{10a+6b}{11a^3} - \frac{6b-a}{11a^3}$;

6) $\frac{x^2-xy}{x^2y} + \frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

70.° Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3}$;

2) $\frac{t}{t^2-16} - \frac{4}{t^2-16}$;

3) $\frac{m^2}{(m-5)^2} - \frac{25}{(m-5)^2}$;

4) $\frac{5x+9}{x^2-1} - \frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{b^2}{b+10} + \frac{20b+100}{b+10}$;

6) $\frac{c^2}{c-7} - \frac{14c-49}{c-7}$.

71.° Упростите выражение:

1) $\frac{c^2}{c-9} - \frac{81}{c-9}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(a-6)^2}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2x+7}{x^2-4}$;

4) $\frac{y^2}{y-2} - \frac{4y-4}{y-2}$.

72.° Выполните действия:

1) $\frac{a+b}{c-7} + \frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{5m}{m-n} + \frac{5n}{n-m}$;

3) $\frac{2x-4y}{x-3y} - \frac{4x-14y}{3y-x}$;

4) $\frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b}$;

5) $\frac{t^2}{3t-6} + \frac{4}{6-3t}$;

6) $\frac{y^2}{y-1} - \frac{1-2y}{1-y}$.

$$73.^* 1) \frac{x}{y-1} + \frac{2}{1-y};$$

$$3) \frac{3m+2n}{2m-3n} - \frac{m-8n}{3n-2m};$$

$$2) \frac{3c}{c-d} + \frac{3d}{d-c};$$

$$4) \frac{b^2}{2b-14} + \frac{49}{14-2b}.$$

■ 74.* Найдите значение выражения:

$$1) \frac{a^2-48}{a-8} - \frac{16}{a-8} \text{ при } a = 32;$$

$$2) \frac{c^2+3c+7}{c^3-8} + \frac{c+3}{8-c^3} \text{ при } c = -3.$$

■ 75.* Найдите значение выражения:

$$1) \frac{5x+3}{x^2-16} + \frac{6x-1}{16-x^2} \text{ при } x = -4,1;$$

$$2) \frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9} \text{ при } a = 7.$$

76.* Упростите выражение:

$$1) \frac{5n-1}{20n} - \frac{7n-8}{20n} - \frac{8n+7}{20n};$$

$$3) \frac{3k}{k^3-1} + \frac{4k+1}{1-k^3} + \frac{k^2}{1-k^3}.$$

$$2) \frac{9m+2}{m^2-4} - \frac{m-9}{4-m^2} + \frac{1-7m}{m^2-4};$$

77.* Упростите выражение:

$$1) \frac{6a-1}{16a-8} + \frac{4a-7}{16a-8} + \frac{-2a-2}{8-16a};$$

$$2) \frac{2a^2+12a}{a^2-25} + \frac{8a-9}{25-a^2} - \frac{a^2+14a-16}{a^2-25}.$$

78.* Представьте в виде дроби выражение:

$$1) \frac{15-8a}{(a-1)^2} - \frac{14-7a}{(1-a)^2};$$

$$3) \frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)} - \frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}.$$

$$2) \frac{3b^2+12}{(b-2)^3} + \frac{12b}{(2-b)^3};$$

79.* Упростите выражение:

$$1) \frac{x^2-16x}{(x-7)^4} + \frac{2x+49}{(7-x)^4};$$

$$2) \frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)} + \frac{y+36}{(6-y)(2+y)}.$$

80.* Докажите тождество:

$$1) \frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1;$$

$$2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$$

81.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения x .

82.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной y значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения y .

83.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

84.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

85.** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x}$;

2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

86.** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a}$;

2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

87.** Известно, что $\frac{x}{y} = 4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x}$;

2) $\frac{2x-3y}{y}$;

3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

88.** Известно, что $\frac{a}{b} = -2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a}$;

2) $\frac{4a+5b}{b}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

89.** Найдите все натуральные значения n , при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n}$;

2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$;

3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

90.** Найдите все натуральные значения n , при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$;

2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$;

3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

91. Из двух сел, расстояние между которыми равно 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

92. Решите уравнение:

1) $1 - 4(x + 1) = 1,8 - 1,6x$;

2) $3(0,5x - 4) + 8,5x = 10x - 11$.

93. Докажите, что выражение $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$ при всех значениях a принимает неотрицательные значения.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

94. Вместо звездочки запишите такой одночлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

95. Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$; 2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 100ab^2$.

96. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{3b}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ и $\frac{y}{x+y}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ и $\frac{3n}{p^2q^3}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ и $\frac{1}{y^2-6y}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ и $\frac{6}{m+n}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ и $\frac{1}{a^2+a}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

97. Может ли четное число иметь нечетных делителей больше, чем четных?

4. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Применяя основное свойство рациональной дроби, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть нужно сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

$$\text{Тогда } \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}.$$

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Отметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним: чтобы найти общий знаменатель обыкновенных дробей, мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично, чтобы найти общий знаменатель рациональных дробей, может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

ПРИМЕР 1 Упростите выражение:

$$1) \frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c};$$

$$4) \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15};$$

$$2) \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n};$$

$$5) \frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}.$$

$$3) \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n};$$

Решение. 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен a^2bc . Следовательно,

$$\frac{a/b+1}{abc} + \frac{b/1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} &= \frac{m-n/n}{7(m+n)} - \frac{m+n/n}{7(m-n)} = \\ &= \frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)} = \frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Имеем: } \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} &= \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} - \frac{n+7/6}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} = \\ &= \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} &= \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \\ &= \frac{3/2a}{(a-5)^2} - \frac{a-5/1}{3(a-5)} = \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}. \end{aligned}$$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x^{-2/2}}{x-4} - \frac{x^{-4/2}}{x-2} &= \frac{x(x-2) - (x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \\ &= \frac{x^2 - 2x - x^2 + 4x - 2x + 8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2 Представьте в виде дроби выражение $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$.

Решение. Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{7c-2}{1} \cdot \frac{3c}{1} = \frac{21c^2 - 21c^2 + 6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. \quad \blacktriangle$$

Заметим, что сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.



1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?
2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

УПРАЖНЕНИЯ

98.° Выполните действия:

1) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3}$;

4) $\frac{4}{x} - \frac{3}{y}$;

7) $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{ab^4}$;

2) $\frac{5b}{14} - \frac{b}{7}$;

5) $\frac{m}{4n} + \frac{m}{6n}$;

8) $\frac{11}{5a} - \frac{2c}{15ab}$;

3) $\frac{m}{8} - \frac{n}{6}$;

6) $\frac{c}{b} - \frac{d}{3b}$;

9) $\frac{m}{abc} + \frac{c}{abm}$.

99.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{8} - \frac{y}{12}$;

3) $\frac{m}{n} - \frac{n}{m}$;

5) $\frac{7}{cd} + \frac{k}{cp}$;

2) $\frac{4a}{7} + \frac{a}{4}$;

4) $\frac{x^2}{2y} + \frac{y}{8x}$;

6) $\frac{6a}{35c^5} - \frac{9b}{14c^2}$.

100.° Упростите выражение:

1) $\frac{a+7}{12} + \frac{a-4}{9}$;

3) $\frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y}$;

2) $\frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15}$;

4) $\frac{6p+1}{p} - \frac{2p+8}{3p}$;

5) $\frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m};$

9) $\frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2};$

6) $\frac{x+4}{11x} - \frac{y-3}{11y};$

10) $\frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y};$

7) $\frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac};$

11) $\frac{2m-3n}{m^2n} + \frac{7m-2n}{mn^2};$

8) $\frac{2}{p^2} + \frac{p-1}{p};$

12) $\frac{c+d}{cd^4} - \frac{c^2-8d}{c^3d^3}.$

101.° Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{9-5b}{b} - \frac{7-5c}{c};$

5) $\frac{6a+2}{ab} - \frac{2a+4}{a^2b};$

2) $\frac{4d+7}{7d} - \frac{d-6}{6d};$

6) $\frac{c^2-16}{c^6} - \frac{c-9}{c^5};$

3) $\frac{5-k}{5p} - \frac{p+10}{5k};$

7) $\frac{1}{x^3} - \frac{1+x^2}{x^5};$

4) $\frac{m-n}{mn} - \frac{p-n}{np};$

8) $\frac{1-ab}{abc} - \frac{1-ad}{acd}.$

102.° Выполните действия:

1) $\frac{2}{x} + \frac{3x-2}{x+1};$

3) $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3};$

5) $\frac{x}{2y+1} - \frac{x}{3y-2};$

2) $\frac{m}{n} - \frac{m}{m+n};$

4) $\frac{c}{3c-1} - \frac{c}{3c+1};$

6) $\frac{a-b}{b} - \frac{a-b}{a+b}.$

103.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b};$

2) $\frac{4}{x} - \frac{5x+4}{x+2};$

3) $\frac{b}{b-2} - \frac{2}{b+2}.$

104.° Упростите выражение:

1) $\frac{1}{b(a-b)} - \frac{1}{a(a-b)};$

4) $\frac{y}{2(y+3)} - \frac{y}{5(y+3)};$

2) $\frac{5}{a} + \frac{30}{a(a-6)};$

5) $\frac{5m+3}{2(m+1)} - \frac{7m+4}{3(m+1)};$

3) $\frac{3}{x-2} - \frac{2x+2}{x(x-2)};$

6) $\frac{c-a}{a(a+b)} + \frac{c+b}{b(a+b)}.$

105.° Выполните действия:

1) $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)};$

3) $\frac{x}{5(x+7)} - \frac{x}{6(x+7)};$

2) $\frac{4}{b} - \frac{8}{b(b+2)};$

4) $\frac{4n+2}{3(n-1)} - \frac{5n+3}{4(n-1)}.$

106.° Выполните сложение или вычитание дробей:

$$1) \frac{a}{a-2} - \frac{3a+1}{3a-6};$$

$$5) \frac{m+1}{3m-15} - \frac{m-1}{2m-10};$$

$$2) \frac{18}{b^2+3b} - \frac{6}{b};$$

$$6) \frac{m-2n}{6m+6n} - \frac{m-3n}{4m+4n};$$

$$3) \frac{2}{c+1} - \frac{c-1}{c^2+c};$$

$$7) \frac{a^2+2}{a^2+2a} - \frac{a+4}{2a+4};$$

$$4) \frac{d-1}{2d-8} + \frac{d}{d-4};$$

$$8) \frac{3x-4y}{x^2-2xy} - \frac{3y-x}{xy-2y^2}.$$

107.° Упростите выражение:

$$1) \frac{b}{b-5} - \frac{4b-1}{4b-20};$$

$$4) \frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b};$$

$$2) \frac{2}{m} - \frac{16}{m^2+8m};$$

$$5) \frac{b+4}{ab-b^2} - \frac{a+4}{a^2-ab};$$

$$3) \frac{a-2}{2a-6} - \frac{a-1}{3a-9};$$

$$6) \frac{c-4}{4c+24} + \frac{4c+9}{c^2+6c}.$$

108.° Выполните действия:

$$1) \frac{3}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-9};$$

$$4) \frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b};$$

$$2) \frac{a^2}{a^2-64} - \frac{a}{a-8};$$

$$5) \frac{m}{m+5} - \frac{m^2}{m^2+10m+25};$$

$$3) \frac{6b}{9b^2-4} - \frac{1}{3b-2};$$

$$6) \frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}.$$

109.° Упростите выражение:

$$1) \frac{4x-y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x-y};$$

$$3) \frac{10a}{25a^2-9} - \frac{1}{5a+3};$$

$$2) \frac{y^2}{y^2-81} - \frac{y}{y+9};$$

$$4) \frac{n}{n-7} - \frac{n^2}{n^2-14n+49}.$$

110.° Представьте в виде дроби выражение:

$$1) \frac{a}{b} + 1;$$

$$5) 2 - \frac{3b+2a}{a};$$

$$2) \frac{x}{y} - x;$$

$$6) \frac{3b+4}{b-2} - 3;$$

$$3) \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2;$$

$$7) 6m - \frac{12m^2+1}{2m};$$

$$4) \frac{9}{p^2} - \frac{4}{p} + 3;$$

$$8) \frac{20b^2+5}{2b-1} - 10b.$$

111.* Выполните действия:

$$1) a - \frac{4}{a};$$

$$4) \frac{2k^2}{k-5} - k;$$

$$2) \frac{1}{x} + x - 2;$$

$$5) 3n - \frac{9n^2 - 2}{3n};$$

$$3) \frac{m}{n^3} - \frac{1}{n} + m;$$

$$6) 5 - \frac{4y-12}{y-2}.$$

112.* Упростите выражение:

$$1) \frac{a^2+1}{a^2-2a+1} + \frac{a+1}{a-1};$$

$$5) \frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a+4}{a^2-4};$$

$$2) \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b};$$

$$6) \frac{2p}{p-5} - \frac{5}{p+5} + \frac{2p^2}{25-p^2};$$

$$3) \frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2};$$

$$7) \frac{1}{y} - \frac{y+8}{16-y^2} - \frac{2}{y-4};$$

$$4) \frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9};$$

$$8) \frac{2b-1}{4b+2} + \frac{4b}{4b^2-1} + \frac{2b+1}{3-6b}.$$

113.* Упростите выражение:

$$1) \frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$4) \frac{b-2}{b^2+6b+9} - \frac{b}{b^2-9};$$

$$2) \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{2xy+x^2+y^2};$$

$$5) \frac{x-6}{x^2+3x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x-3}{x};$$

$$3) \frac{2a}{4a^2-1} - \frac{a+4}{2a^2+a};$$

$$6) \frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

114.* Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:

$$1) \frac{2x+1}{2x-4} + \frac{2x-1}{6-3x} - \frac{x+7}{6x-12};$$

$$2) \frac{24-2a}{a^2-16} - \frac{a}{2a-8} + \frac{4}{a+4}.$$

115.* Представьте в виде дроби выражение:

$$1) 1 - a + \frac{a^2-2}{a+2};$$

$$3) \frac{c^2+9}{c-3} - c - 3;$$

$$2) \frac{a^2-b^2}{3a+b} + 3a - b;$$

$$4) \frac{8m^2}{4m-3} - 2m - 1.$$

116.* Упростите выражение:

$$1) b + 7 - \frac{14b}{b+7};$$

$$2) 5c - \frac{10-29c+10c^2}{2c-5} + 2.$$

117.* Упростите выражение и найдите его значение:

- 1) $\frac{7}{2a-4} - \frac{12}{a^2-4} - \frac{3}{a+2}$, если $a = 5$;
- 2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c} + \frac{2c-3}{2c^2+3c} - \frac{16c}{4c^2-9}$, если $c = -0,8$;
- 3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2} - \frac{m+4n}{2m-8n}$, если $m = 3$, $n = 0,5$.

118.* Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}$, если $x = 5$;
- 2) $\frac{2y-1}{2y} - \frac{2y}{2y-1} - \frac{1}{2y-4y^2}$, если $y = -2\frac{3}{7}$.

119.* Докажите тождество:

- 1) $\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab} = 0$;
- 3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1} - \frac{a-2}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} = \frac{1}{a-1}$.
- 2) $\frac{a+3}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} = \frac{2}{a^2-1}$;

120.* Докажите тождество:

- 1) $\frac{1}{6a-4b} - \frac{1}{6a+4b} - \frac{3a}{4b^2-9a^2} = \frac{1}{3a-2b}$;
- 2) $\frac{c+2}{c^2+3c} - \frac{1}{3c+9} - \frac{2}{3c} = 0$.

121.* Найдите разность дробей:

- 1) $\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}$;
- 2) $\frac{1}{b+3} - \frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

122.* Упростите выражение:

- 1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n} - \frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;
- 2) $1 - \frac{2b-1}{4b^2-2b+1} - \frac{2b}{2b+1}$.

123.* Докажите тождество: $\frac{3a^2+24}{a^3+8} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}$.

124.* Упростите выражение:

- 1) $\frac{4b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{b^2-ab}$;
- 2) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;
- 3) $\frac{1}{(a-5b)^2} - \frac{2}{a^2-25b^2} + \frac{1}{(a+5b)^2}$;
- 4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6} - \frac{x+5}{y-2}$.

125.* Докажите тождество:

$$1) \frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-3}{3a+9} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{a-3}{3a};$$

$$2) \frac{b-4}{2a-1} - \frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a} = \frac{2}{2a-1}.$$

126.* Докажите тождество

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

127.* Докажите тождество

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

128.* Упростите выражение

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

129.* Упростите выражение

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

130.* Докажите тождество

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

131.* Докажите тождество

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}.$$

132.* Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$, то

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

133. Найдите корень уравнения:

$$1) \frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4;$$

$$2) \frac{x-4}{2} - \frac{x-1}{5} = 3.$$

134. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$$

135. За первый день трехдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — оставшиеся 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за три дня?
136. (Из болгарского фольклора.) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечетное количество овец. Возможно ли это?
137. Верно ли утверждение, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$ делится нацело на 48?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

138. Укажите число, обратное числу:
- 1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.
139. Найдите значение произведения:
- 1) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{20}$; 2) $6 \cdot \frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8} \cdot \left(-2\frac{2}{3}\right)$.
140. Выполните деление:
- 1) $\frac{5}{18} : \left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8 : \frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15} : (-24)$; 4) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$.
141. Найдите значение степени:
- 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

142. Два парома одновременно отплывают от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянные, но разные. Паромы встречаются на расстоянии 720 м от одного из берегов, после чего продолжают движение. Достигнув берегов, паромы сразу начинают двигаться обратно и через некоторое время встречаются на расстоянии 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

ЗАДАНИЕ № 1 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какое из данных выражений является целым?
- А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m + \frac{n}{7m}$.
2. При каком значении переменной не имеет смысла выражение $\frac{3a}{2a-10}$?
- А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.
3. При каких значениях аргумента функция $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ не определена?
- А) -1; 1; Б) 1; В) -2; -1; 1; Г) -2; 1.
4. Сократите дробь $\frac{21a^6}{14a^3}$.
- А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.
5. Какой из данных дробей тождественно равна дробь $\frac{5b-15}{b^2-9}$?
- А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.
6. Сократите дробь $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$.
- А) 4c; Б) -4c; В) $\frac{1}{4c}$; Г) $-\frac{1}{4c}$.
7. Выполните вычитание: $\frac{5x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$.
- А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) -5.
8. Выполните сложение: $\frac{4-m}{m-3} + \frac{2m-5}{3-m}$.
- А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) -3.
9. Представьте в виде дроби выражение $\frac{3n^2}{n-6} - 3n$.
- А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

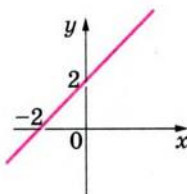
10. Упростите выражение $\frac{2m+1}{3m-2} - \frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\frac{1}{(3m-2)^2}$; Б) $\frac{1}{3m-2}$; В) $\frac{m}{(3m-2)^2}$; Г) $\frac{m}{3m-2}$.

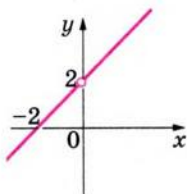
11. Упростите выражение $\frac{a-12}{a^2+4a} - \frac{a-4}{a} + \frac{a}{a+4}$.

А) $\frac{4}{a}$; Б) $\frac{1}{a}$; В) a ; Г) $a+4$.

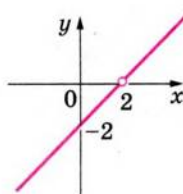
12. На каком рисунке изображен график функции $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$?



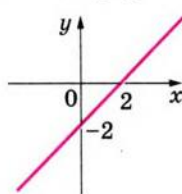
А)



Б)



В)



Г)

5. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

По аналогичным правилам выполняют умножение и деление рациональных дробей.

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

ПРИМЕР 1 Выполните действия:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4};$

3) $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}.$

2) $(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36};$

4) $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7).$

Решение. 1) Имеем: $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}.$

2) Представив многочлен $2x - 12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

3) $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}.$

4) $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}. \blacktriangle$

Правило умножения двух дробей можно обобщить для случая, когда требуется найти произведение трех и более рациональных дробей. Например, для трех дробей имеем:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

ПРИМЕР 2 Упростите выражение $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}.$ *Решение.* Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} &= \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \\ &= \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального n , $n > 1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ договорились, что $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$

Следовательно,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

где n — натуральное число.

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

ПРИМЕР 3 Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Решение. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}.$ ▲

?

1. Что является произведением двух рациональных дробей?
2. Что является частным двух рациональных дробей?
3. Как возвести рациональную дробь в степень?

УПРАЖНЕНИЯ

143.° Какому из данных выражений равно произведение $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

- 1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144.° Выполните умножение:

- 1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;
 2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

145.° Упростите выражение:

- 1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;
 2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

146.° Упростите выражение:

- 1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$; 2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;

3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b};$

7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8};$

4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a};$

8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9};$

5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1};$

9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1};$

6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2};$

10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}.$

147.° Выполните умножение:

1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b};$

4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b};$

2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4};$

5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n);$

3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y};$

6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}.$

148.° Какому из данных выражений равно частное $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4};$

2) $\frac{c^6}{4};$

3) $4c^3;$

4) $4c^6.$

149.° Выполните деление:

1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n};$

3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3};$

5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3};$

7) $24a^3 : \frac{12a^2}{b};$

2) $\frac{3b}{8} : b;$

4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2};$

6) $a^2 : \frac{a}{b^2c};$

8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c).$

150.° Найдите частное:

1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8};$

3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2};$

5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2};$

2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48};$

4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2);$

6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right).$

151.° Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b};$

4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy};$

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5};$

5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7};$

3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20};$

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2);$

7) $(p^2 - 16k^2) : \frac{p+4k}{p};$

8) $\frac{a^2 - ab}{a^2} : \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab}.$

152.° Выполните деление:

1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2};$

4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3};$

2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8};$

5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64};$

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab};$

6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}.$

153.° Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9;$

3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5;$

5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3;$

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8;$

4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2;$

6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2.$

154.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10};$

2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2;$

3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3;$

4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6.$

155.° Упростите выражение:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3} \cdot \frac{14b^2}{a^7c^5} \cdot \frac{5a^3c^8}{18b^4};$

4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8};$

2) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2};$

5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3;$

3) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y};$

6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3.$

156.° Упростите выражение:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3};$

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}};$

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}};$

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3.$

157.° Замените переменную x таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2};$

2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}.$

158.* Выполните умножение и деление дробей:

$$1) \frac{4-a}{8a^3} \cdot \frac{12a^5}{a^2-16};$$

$$6) \frac{x^2-9}{x+y} \cdot \frac{5x+5y}{x^2-3x};$$

$$2) \frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd};$$

$$7) \frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m};$$

$$3) \frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15};$$

$$8) \frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4};$$

$$4) \frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16};$$

$$9) \frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24};$$

$$5) \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2};$$

$$10) \frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}.$$

159.* Упростите выражение:

$$1) \frac{7a^2}{a^2-25} \cdot \frac{5-a}{a};$$

$$5) \frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2};$$

$$2) \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{b-a}{b+a};$$

$$6) \frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12};$$

$$3) \frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2};$$

$$7) \frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1};$$

$$4) \frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a};$$

$$8) \frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50).$$

160.* Упростите выражение и найдите его значение:

$$1) \frac{a^2-81}{a^2-8a} : \frac{a-9}{a^2-64}, \text{ если } a = -4;$$

$$2) \frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}, \text{ если } x = 4,2, y = -2,8;$$

$$3) (3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}, \text{ если } a = 0,5;$$

$$4) \frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}, \text{ если } a = 0,8.$$

161.* Найдите значение выражения:

$$1) \frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}, \text{ если } a = 2\frac{1}{3}, b = -\frac{3}{7};$$

$$2) \frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}, \text{ если } a = 4, b = -5.$$

162.** Известно, что $x - \frac{1}{x} = 9$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

163.* Известно, что $3x + \frac{1}{x} = -4$. Найдите значение выражения

$$9x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

164.* Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Найдите значение выражения $x + \frac{4}{x}$.

165.* Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Найдите значение выражения $x - \frac{1}{x}$.

166.* Упростите выражение:

$$1) \frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2};$$

$$2) \frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}.$$

167.* Упростите выражение:

$$1) \frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} \cdot \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25};$$

$$2) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}.$$

168.* Докажите тождество $\frac{8a^2}{a-3b} : \frac{6a^3}{a^2-9b^2} \cdot \frac{3a}{4a+12b} = 1$.

169.* Докажите тождество $\frac{a^2+a}{2a-12} \cdot \frac{6a+6}{2a+12} : \frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36} = \frac{1}{6}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

170. Решите уравнение:

$$1) (2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10;$$

$$2) (x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12.$$

171. Докажите, что уравнение $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ не имеет корней.

172. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта В со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

173. В двух бидонах находится 80 л молока. Если из первого бидона перелить 20 % молока во второй бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

174. (Из учебника «Арифметика» Л. Ф. Магницкого¹.) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

175. Вася и Петя по очереди заменяют в уравнении $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак $*$ на некоторое число. Первым замену делает Вася. Петя хочет получить уравнение, которое имеет корень. Может ли Вася ему помешать?

6. Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий с рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1 Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} \right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Решение. Данное выражение можно упростить аналогично тому, как мы делали это, когда находили значение числового выражения, содержащего несколько арифметических действий. Выполним действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} &= \frac{a-2}{a-2} \cdot \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}; \\ 2) \quad \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} &= \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} = \\ &= \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2}; \end{aligned}$$

¹ Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739) — выдающийся русский педагог-математик, автор знаменитого учебника «Арифметика» (1703), по которому училось несколько поколений. «Вратами своей учености» считал «Арифметику» Магницкого М. В. Ломоносов.

$$3) \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

Ответ: a . ▲

Преобразование рационального выражения можно выполнять не отдельными действиями, а «цепочкой». Проиллюстрируем этот прием на примере.

ПРИМЕР 2 Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения a .

Решение. Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} &= \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \\ &= \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех допустимых значениях a значение данного выражения равно 3. ▲

ПРИМЕР 3 Докажите тождество $\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого равенства. Здесь целесообразно раскрыть скобки, применяя distributive свойство умножения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} &= \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \\ &= \frac{a+1}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}. \end{aligned}$$

Тождество доказано. ▲

ПРИМЕР 4 Упростите выражение $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$.

Решение. Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \\ &= \frac{bc+ac+ab}{abc} : \frac{c+a+b}{abc} = \frac{bc+ac+ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c+a+b} = \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}. \end{aligned}$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно: умножить ее числитель и знаменатель на одночлен abc :

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)abc} = \frac{\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc}{\frac{1}{ab} \cdot abc + \frac{1}{bc} \cdot abc + \frac{1}{ac} \cdot abc} = \frac{bc + ac + ab}{c + a + b}.$$

Ответ: $\frac{bc + ac + ab}{c + a + b}$. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

176.° Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right) \cdot \frac{6}{a^2}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n} - \frac{4}{m+n}\right) \cdot \frac{m+9n}{m+n}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$;

7) $\frac{x-2}{x+2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{x-2}\right)$;

3) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{b}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4} : \frac{x^2+x-1}{x}$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1\right) \cdot \frac{b}{a-b}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1} : \left(\frac{1}{c-1} + 1\right)$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1} \cdot \frac{b+1}{a} - \frac{a}{b-1}$;

10) $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

177.° Упростите выражение:

1) $\left(x + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(x - \frac{x}{y}\right)$;

5) $\frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2}{b^2} : \frac{a+b}{b}$;

2) $\left(\frac{a}{b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

6) $\frac{7x}{x+2} - \frac{x-8}{3x+6} \cdot \frac{84}{x^2-8x}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1} - 1\right) : \frac{m}{mn-n}$;

7) $\left(a - \frac{9a-9}{a+3}\right) : \frac{a^2-3a}{a+3}$;

4) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{4ab}{a-b}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2} - \frac{8}{a+8}\right) \cdot \frac{a^2+8a}{a-4}$.

178.° Выполните действия:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2}$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1} - \frac{3c-1}{3c+1}\right) : \frac{2c}{6c+2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3}\right)$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2}\right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$;

$$5) \left(\frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25} \right) : \frac{a-20}{(a-5)^2};$$

$$6) \left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x} \right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}.$$

179. Выполните действия:

$$1) \frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4};$$

$$2) \left(\frac{m-1}{m+1} - \frac{m+1}{m-1} \right) : \frac{4m}{m^2-1};$$

$$3) \frac{2x}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2} \right);$$

$$4) \left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a} \right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}.$$

180. Упростите выражение:

$$1) \left(\frac{15}{x-7} - x - 7 \right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64};$$

$$2) \left(a - \frac{5a-16}{a-3} \right) : \left(2a - \frac{2a}{a-3} \right);$$

$$3) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2} \right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a};$$

$$4) \left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2};$$

$$5) \left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2} \right) : \frac{4y}{x+2y};$$

$$6) \left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right) \cdot \frac{a^2-4}{4}.$$

181. Упростите выражение:

$$1) \frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left(\frac{13}{x+6} - x + 6 \right);$$

$$2) \left(c - \frac{2c-9}{c+8} \right) : \frac{c^2+3c}{c^2-64} + \frac{24}{c};$$

$$3) \left(\frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x} \right) : \frac{6}{3-x};$$

$$4) \left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2} \right) \cdot \frac{y^2-4}{18}.$$

182.* Докажите тождество:

$$1) \left(\frac{ab}{a^2 - b^2} + \frac{b}{2b - 2a} \right) : \frac{2b}{a^2 - b^2} = \frac{a - b}{4};$$

$$2) \left(\frac{8a}{4 - a^2} - \frac{a - 2}{a + 2} \right) : \frac{a + 2}{a} + \frac{2}{a - 2} = -1;$$

$$3) \left(\frac{3}{36 - c^2} + \frac{1}{c^2 - 12c + 36} \right) \cdot \frac{(c - 6)^2}{2} + \frac{3c}{c + 6} = 2.$$

183.* Докажите тождество:

$$1) \left(\frac{b}{a^2 - ab} - \frac{2}{a - b} - \frac{a}{b^2 - ab} \right) : \frac{a^2 - b^2}{4ab} = \frac{4}{a + b};$$

$$2) \frac{(a - b)^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a - b)^2} + \frac{a}{b^2 - a^2} \right) + \frac{3a + b}{a + b} = 3.$$

184.* Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

$$1) \left(\frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 + a} \right) : \frac{3a + 3}{a^2 - a}; \quad 2) \left(\frac{a}{a^2 - 49} - \frac{1}{a + 7} \right) : \frac{7a}{a^2 + 14a + 49} - \frac{2}{a - 7}?$$

185.* Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

$$1) \frac{3x^2 - 27}{4x^2 + 2} \cdot \left(\frac{6x + 1}{x - 3} + \frac{6x - 1}{x + 3} \right);$$

$$2) \frac{3}{2a - 3} - \frac{8a^3 - 18a}{4a^2 + 9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2 - 12a + 9} - \frac{3}{4a^2 - 9} \right).$$

186.* Упростите выражение:

$$1) \frac{a - \frac{a^2}{a + 1}}{a - \frac{a}{a + 1}};$$

$$3) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}};$$

$$2) \frac{a - \frac{6a - 9}{1 - \frac{3}{a}}}{a};$$

$$4) \frac{\frac{2a - b}{2a + b} + 1}{\frac{b}{b} - 1} + \frac{3 - \frac{b}{a}}{\frac{3a}{b} - 1}.$$

187.* Упростите выражение:

$$1) \frac{\frac{a - b}{a + b} + \frac{b}{a - b}}{\frac{a}{a + b} - \frac{a - b}{a}};$$

$$2) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a + 1}}}.$$

188.** Упростите выражение:

$$1) \left(\frac{a^2}{b^3 - ab^2} + \frac{a-b}{b^2} - \frac{1}{b} \right) : \left(\frac{a+b}{b-a} - \frac{b-a}{a+b} + \frac{6a^2}{a^2 - b^2} \right);$$
$$2) \left(\frac{a+2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a} \right) : \left(\frac{1}{1-2a} \right)^2 - \frac{8a-1}{2a^2 + a}.$$

189.** Упростите выражение:

$$\left(\frac{18y^2 + 3y}{27y^3 - 1} - \frac{3y+1}{9y^2 + 3y + 1} \right) : \left(1 - \frac{3y-1}{y} - \frac{5-6y}{3y-1} \right).$$

190.** Докажите тождество:

$$1) \frac{16}{(a-2)^4} : \left(\frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2 - 4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) - \frac{8a}{(a-2)^2} = 1;$$
$$2) \frac{a+11}{a+9} - \left(\frac{a+5}{a^2 - 81} + \frac{a+7}{a^2 - 18a + 81} \right) : \left(\frac{a+3}{a-9} \right)^2 = 1.$$

191.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left(\frac{b+3}{b-3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b} \right)$ принимает положительные значения.

192.** Подставьте вместо x данное выражение и упростите полученное выражение:

$$1) \frac{x-a}{x-b}, \text{ если } x = \frac{ab}{a+b}; \quad 2) \frac{a-bx}{b+ax}, \text{ если } x = \frac{a-b}{a+b}.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

193. Решите уравнение:

$$1) (3x - 1)(4x + 5) - (2x + 3)(6x + 1) = 4;$$
$$2) 8x(2x + 7) - (4x + 3)^2 = 15.$$

194. Докажите, что значение выражения $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$ делится нацело на 11.

195. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

196. На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нем осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько картофеля было на первом складе первоначально?

197. Куртка стоила на 200 грн меньше, чем костюм. Во время сезонной распродажи куртка подешевела на 10 %, а костюм — на 20 %, после чего куртку и костюм можно было приобрести за 1010 грн. Какова первоначальная цена куртки и какова — костюма?
198. Из пункта *A* в пункт *B* автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта *B* в пункт *A* со скоростью 70 км/ч по другой дороге, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль потратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта *A* в пункт *B*. За какое время он доехал из пункта *A* в пункт *B*?
199. Рабочий должен был изготавливать ежедневно 10 деталей. Однако он изготавливал ежедневно 12 деталей, и уже за 2 дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?
- 200.* (Из украинского фольклора.) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за трех воробьев платили одну монету, за двух голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — две монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

201. Решите уравнение:

- 1) $\frac{2x+7}{4} = \frac{x+5}{3}$; 3) $0,21x - 0,7x = 0$; 5) $25x^2 - 36 = 0$;
2) $x^2 + 6x = 0$; 4) $x^2 - 16 = 0$; 6) $x^2 + 4 = 0$.

202. При каком значении переменной не имеет смысла выражение:

- 1) $\frac{6}{3x-9}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;
2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{8}{x+7} + \frac{4}{x-2}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

203. При каком значении переменной значение дроби равно нулю:

- 1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

Повторите содержание пп. 14, 15 на с. 235–236.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

204. На доске написаны многочлены $x + 2$ и $2x + 1$. Разрешается записать сумму, разность или произведение любых двух из уже написанных многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $2x^3 + x + 5$?

ЗАДАНИЕ № 2 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Представьте в виде дроби выражение $\frac{12m^4}{n^{10}} \cdot \frac{n^5}{36m^8}$.

- А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

2. Выполните умножение: $(a+5b) \cdot \frac{8}{a^2-25b^2}$.

- А) $8(a-5b)$; Б) $8(a+5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

3. Упростите выражение $\frac{b^2-6b+9}{b-7} \cdot \frac{b-7}{b-3}$.

- А) $b+3$; Б) $b-3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

4. Выполните деление: $\frac{5a^6}{b^8} : (10a^3b^2)$.

- А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

5. Упростите выражение $\frac{3x+9}{x^2-2x} : \frac{x+3}{4x-8}$.

- А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12 ; Г) x .

6. Представьте в виде дроби выражение $\frac{n^2-3n}{64n^2-1} : \frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

- А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;
Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

7. Выполните возведение в степень: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

- А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Упростите выражение $\left(\frac{1}{a-6} - \frac{1}{a+6}\right) : \frac{2}{a+6}$.

- А) $\frac{6}{a+6}$; Б) $\frac{6}{a-6}$; В) $6(a-6)$; Г) $6(a+6)$.

9. Какому числу при всех допустимых значениях a равно значение выражения $\left(\frac{30a}{9a^2-25} + \frac{5}{5-3a}\right) : \left(\frac{3a-5}{3a+5} - 1\right)$?

- А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\frac{1}{2}$; Г) -2.

10. Чему равно значение выражения $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, если $3a - 5b = 0,2(2a + b)$?

- А) 4; Б) -4; В) 3; Г) -3.

11. Известно, что $x + \frac{1}{x} = 6$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

- А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

12. Упростите выражение $\frac{\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}}$.

- А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$; Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

7. Равносильные уравнения. Рациональные уравнения

Рассмотрим два уравнения: $x^2 = 4$ и $|x| = 2$.

Очевидно, что каждое из них имеет одни и те же корни: -2 и 2.

Говорят, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ **равносильны**.

Приведем еще примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ и } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ и } 4x - 8 = 0;$$
$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Рассмотрим уравнения $x^2 = -5$ и $|x| = -3$. Каждое из этих уравнений не имеет корней. Такие уравнения также принято считать равносильными.

Определение. Два уравнения называют **равносильными**, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.

Число 2 является корнем каждого из уравнений $(x - 2)(x + 1) = 0$ и $x - 2 = 0$. Однако эти уравнения не являются равносильными, так как первое уравнение имеет еще один корень, равный -1 , который не является корнем второго уравнения.

В 7 классе вы изучили свойства уравнений с одной переменной. Теперь, используя понятие «равносильные уравнения», эти свойства можно сформулировать следующим образом.

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим такую задачу. Автомобиль, проехав 180 км пути, увеличил скорость на 10 км/ч и оставшиеся 210 км проехал за то же время, что и первую часть пути. Найдите начальную скорость автомобиля.

Пусть x км/ч — искомая скорость. Тогда скорость автомобиля на второй части пути равна $(x + 10)$ км/ч. Автомобиль преодолел первую часть пути за $\frac{180}{x}$ ч, а вторую — за $\frac{210}{x+10}$ ч.

Уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ является математической моделью рассмотренной реальной ситуации. Обе части полученного уравнения являются рациональными выражениями.

Определение. Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют **рациональным**.

Из определения следует, что, решая задачу, мы получили рациональное уравнение.

Отметим, что линейное уравнение с одной переменной, то есть уравнение вида $ax = b$, является рациональным.

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

Вы знаете, что *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля*. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, нужно потребовать *одновременного* выполнения двух условий: $A = 0$ и $B \neq 0$. Это значит, что при решении уравнений указанного вида следует руководствоваться таким алгоритмом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$.

Решение. Приравняем числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, к нулю. Имеем: $(x-1)(x+1) = 0$. Корнями этого уравнения являются числа -1 и 1 .

Проверим, удовлетворяют ли эти корни условию $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

При $x = -1$ получаем, что $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

При $x = 1$ получаем, что $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Следовательно, число -1 является корнем заданного уравнения, а число 1 — нет.

Ответ: -1 . ▲

Как мы уже отмечали выше, решение уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$ сводится к решению уравнения $A = 0$ и проверке условия $B \neq 0$. Говорят, что уравнение $\frac{A}{B} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Например, уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили, решением этой системы является число -1 .

Завершим решение задачи об автомобиле. Имеем: $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$.

Переходим к равносильному уравнению $\frac{180}{x} - \frac{210}{x+10} = 0$.

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{180(x+10) - 210x}{x(x+10)} &= 0; \\ \frac{1800 - 30x}{x(x+10)} &= 0.\end{aligned}$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1800 - 30x = 0, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$

Корнем уравнения, входящего в систему, является число 60; очевидно, что оно удовлетворяет условию $x(x+10) \neq 0$.

Ответ: 60 км/ч.

Как известно, любое рациональное выражение можно представить в виде дроби. Поэтому любое рациональное уравнение можно свести к уравнению вида $\frac{A}{B} = 0$. Именно так мы и поступили, решая

уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$.

ПРИМЕР 2 Решите уравнение $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$.

Решение. Имеем: $\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0$. Представив

левую часть этого уравнения в виде рациональной дроби, получим:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4x-2=0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$

Перепишем эту систему так: $\begin{cases} 4x-2=0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x=0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$

Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет. ▲

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $\frac{2x^2 - 4x - 16}{x - 4} - x = 0$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 4x}{x - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Ответ: -4. ▲

Рассмотрим задачу, в которой рациональное уравнение является математической моделью реальной ситуации.

ПРИМЕР 4 Турист проплыл на лодке 3 км по течению реки и 2 км против течения за 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение. Пусть скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч. Тогда ее скорость по течению реки составляет $(x + 2)$ км/ч, а против течения — $(x - 2)$ км/ч. Турист проплыл 3 км по течению за $\frac{3}{x+2}$ ч, а 2 км против течения — за $\frac{2}{x-2}$ ч. Поскольку весь путь

был пройден за 30 мин = $\frac{1}{2}$ ч, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)} = 0;$$

$$\frac{10x-x^2}{2(x^2-4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \\ x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = 10.$$

Корень $x = 0$ не соответствует смыслу задачи. Следовательно, скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч. ▲

?

1. Какие два уравнения называют равносильными?
2. С помощью каких преобразований данного уравнения можно получить уравнение, равносильное данному?
3. Какое уравнение называют рациональным?
4. Сформулируйте условие, при котором дробь равна нулю.
5. Опишите алгоритм решения уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

УПРАЖНЕНИЯ

205.° Равносильны ли уравнения:

- 1) $x + 2 = 10$ и $3x = 24$;
- 2) $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$;
- 3) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;
- 4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ и $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;
- 5) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;
- 6) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$?

206.° Составьте уравнение, равносильное данному:

- 1) $2x - 3 = 4$;
- 2) $|x| = 1$;
- 3) $x + 6 = x - 2$.

207.° Решите уравнение:

- 1) $\frac{x-6}{x-4} = 0$;
- 2) $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;
- 3) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$;
- 4) $\frac{x-2}{x-2} = 1$;

$$5) \frac{2x^2+18}{x^2+9} = 2;$$

$$6) \frac{x}{x-5} + \frac{2x-9}{x-5} = 0;$$

$$7) \frac{5x-7}{x+1} - \frac{x-5}{x+1} = 0;$$

$$8) \frac{2x+16}{x+3} - \frac{1-3x}{x+3} = 0;$$

$$9) \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0;$$

$$10) \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+3};$$

$$11) \frac{x}{x-6} = 2;$$

$$12) \frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+1}{2x-1};$$

$$13) \frac{x+8}{x} - \frac{6}{x-2} = 0;$$

$$14) \frac{2x}{x-5} - \frac{x^2+15x}{x^2-25} = 0;$$

$$15) 3 - \frac{2x^2-5x}{x^2-3x} = 0.$$

208.° Решите уравнение:

$$1) \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 0;$$

$$2) \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = 0;$$

$$3) \frac{x+7}{x-7} - \frac{2x-3}{x-7} = 0;$$

$$4) \frac{10-3x}{x+8} + \frac{5x+6}{x+8} = 0;$$

$$5) \frac{x-6}{x-2} - \frac{x-8}{x} = 0;$$

$$6) \frac{2x-4}{x} - \frac{3x+1}{x} + \frac{x+5}{x} = 0;$$

$$7) \frac{x}{x+6} - \frac{36}{x^2+6x} = 0;$$

$$8) \frac{2x^2+3x+1}{2x+1} - x = 1;$$

$$9) \frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1.$$

209.° Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{15}{19}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{2}{3}$?

210.° Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{25}{32}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{6}$?

211.° Составьте пару равносильных уравнений, каждое из которых:

- 1) имеет один корень; 3) имеет бесконечно много корней;
2) имеет два корня; 4) не имеет корней.

212.° Решите уравнение:

$$1) \frac{5}{x^2-4} + \frac{2x}{x+2} = 2;$$

$$3) \frac{6x+14}{x^2-9} + \frac{7}{x^2+3x} = \frac{6}{x-3};$$

$$2) \frac{2}{6x+1} + \frac{3}{6x-1} = \frac{30x+9}{36x^2-1};$$

$$4) \frac{2y^2+5}{1-y^2} + \frac{y+1}{y-1} = \frac{4}{y+1};$$

$$5) \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2};$$

$$7) \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} = \frac{6x+64}{x^2-16} + 4;$$

$$6) \frac{7}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2};$$

$$8) \frac{2x-6}{x^2-36} - \frac{x-3}{x^2-6x} - \frac{x-1}{x^2+6x} = 0.$$

213.* Решите уравнение:

$$1) \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{x^2+27}{x^2-1};$$

$$4) \frac{2x^2-2x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = \frac{x+2}{x-2};$$

$$2) \frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{6}{1-9x^2};$$

$$5) \frac{7}{x^2+2x} + \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{x+4}{x^2-4};$$

$$3) \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{5}{x-2};$$

$$6) \frac{x^2-9x+50}{x^2-5x} = \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-5}{x}.$$

214.* Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 18 км/ч.

215.* Теплоход прошел 28 км против течения реки и вернулся обратно, потратив на обратный путь на 4 мин меньше. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

216.* Лодка прошла 6 км против течения реки и 12 км по течению, потратив на весь путь 2 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки составляет 3 км/ч.

217.** Решите уравнение:

$$1) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50};$$

$$3) \frac{9x+12}{x^3-64} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x^2+4x+16}.$$

$$2) \frac{2}{x^2-9} - \frac{1}{2x^2-12x+18} = \frac{3}{2x^2+6x};$$

218.** Решите уравнение:

$$1) \frac{4y+24}{5y^2-45} + \frac{y+3}{5y^2-15y} = \frac{y-3}{y^2+3y};$$

$$2) \frac{y+2}{8y^3+1} - \frac{1}{4y+2} = \frac{y+3}{8y^2-4y+2}.$$

219.* Для каждого значения a решите уравнение:

$$1) \frac{x-1}{x-a} = 0;$$

$$3) \frac{a(x-a)}{x-3} = 0;$$

$$5) \frac{(x-4)(x+2)}{x-a} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x+5} = 0;$$

$$4) \frac{(x-a)(x-6)}{x-7} = 0;$$

$$6) \frac{x-a}{(x-4)(x+2)} = 0.$$

220.* При каких значениях a уравнение $\frac{x+a}{x^2-4} = 0$ не имеет корней?

221.* При каких значениях a уравнение $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ имеет один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

222. На конец года численность населения города составляла 72 100 жителей. Определите количество жителей в этом городе на начало года, если прирост населения за это время составил 3 %.
223. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 45 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то он пройдет это расстояние за 40 мин. Каково расстояние между станциями?
224. Докажите, что при любых значениях переменных данное выражение принимает неотрицательные значения:
1) $(a - 5)^2 - 2(a - 5) + 1$; 2) $(a - b)(a - b - 8) + 16$.
225. Найдите значение функции $f(x) = 3x - 7$ при: 1) $x = -3$;
2) $x = 2\frac{1}{3}$. При каком значении аргумента значение функции равно 0,2?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

226. Найдите значение выражения:

1) $4^3 + 3^4$; 2) $(-8)^2 - (-1)^{12}$; 3) $9 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^2$; 4) $(2,8 - 3,1)^3 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

227. Не выполняя вычислений, сравните значения выражений:

1) $(-5,7)^2$ и 0; 2) 0 и $(-6,9)^3$; 3) $(-23)^5$ и $(-2)^4$; 4) -8^8 и $(-8)^8$.

228. Представьте в виде степени:

1) с основанием 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) с основанием 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

229. Найдите значение выражения:

1) $18a^2$, если $a = -\frac{1}{6}$;

3) $16 + b^4$, если $b = -2$;

2) $(18a)^2$, если $a = -\frac{1}{6}$;

4) $(16 + b)^4$, если $b = -2$.

Повторите содержание п. 3 на с. 232.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

230. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 дает в результате квадрат натурального числа, а при умножении на 3 — куб натурального числа?

Из определения следует, что, например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} =$
 $= \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0,3)^{-1} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$.

Итак, мы можем возводить число в любую целую степень, кроме нуля. Заполним этот пробел.

Определение. Для любого числа a , не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Выражение 0^n при целых n , меньших или равных нулю, не имеет смысла.

Из данных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и целом n числа a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n .

Например, при $n = -2$ имеем: $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

В справочной литературе вы можете найти следующую информацию: «Масса Венеры равна $4,9 \cdot 10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6,423 \cdot 10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3,8 \cdot 10^7$ км².» Числа, выражающие эти величины, записаны в так называемом стандартном виде.

Определение. Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.

Число n называют **порядком** числа, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома Гидрогена в килограммах, равен -27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171,25 = 1,7125 \cdot 10^2$; $0,00958 = 9,58 \cdot 10^{-3}$. Однако на практике стандартный вид числа используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа дает представление о величине. Например, если порядок числа m равен 3, то есть $m = a \cdot 10^3$, то с учетом того, что $1 \leq a < 10$, получаем: $10^3 \leq m < 10^4$.

ПРИМЕР 1 Найдите значение выражения: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1,2^{-2}$;

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0$.

Решение. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

И вообще, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1,2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 =$
 $= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ▲

ПРИМЕР 2 Представьте выражение $(a-b)^{-2} (a^{-2} - b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

Решение. $(a-b)^{-2} (a^{-2} - b^{-2}) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} =$
 $= \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} = \frac{b+a}{a^2 b^2 (b-a)} = \frac{b+a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}$. ▲

ПРИМЕР 3 Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Решение. 1) $564\,000\,000 = 5,64 \cdot 100\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8$.

$0,0036 = 3,6 \cdot 0,001 = 3,6 \cdot \frac{1}{1000} = 3,6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3,6 \cdot 10^{-3}$. ▲



1. Чему равно a^{-n} для любого отличного от нуля числа a и натурального числа n ?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. Как в записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ называют число n ?

УПРАЖНЕНИЯ

231.° Какому из выражений равно выражение a^{-6} :

- 1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

232.° Представьте степень в виде дроби:

- 1) 3^{-8} ; 3) a^{-9} ; 5) 12^{-1} ; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6} ; 4) d^{-3} ; 6) m^{-1} ; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

233.° Замените степень дробью:

- 1) 14^{-4} ; 2) p^{-20} ; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

234.° Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

- 1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

235.° Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

- 1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

236.° Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

237.° Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

- 1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

238.° Представьте в виде степени с основанием 10 число:

- 1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

239.° Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

240.° Вычислите:

- 1) 5^{-2} ; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24} ; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) 2^{-4} ; 4) $0,2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^0$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

241.° Найдите значение выражения:

- 1) 20^{-2} ; 2) $0,3^{-1}$; 3) $(-6)^{-3}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

242.° Вычислите значение выражения:

- | | |
|--|--|
| 1) $3^{-1} - 4^{-1}$; | 4) $9 \cdot 0,1^{-1}$; |
| 2) $2^{-3} + 6^{-2}$; | 5) $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$; |
| 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$; | 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$. |

243.° Чему равно значение выражения:

- | | |
|------------------------|--|
| 1) $2^{-2} + 2^{-1}$; | 3) $0,03^0 + 0,7^0$; |
| 2) $3^{-2} - 6^{-1}$; | 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$? |

244.° Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $12 \cdot 10^4$; | 2) $1,2 \cdot 10^4$; | 3) $0,12 \cdot 10^4$? |
|----------------------|-----------------------|------------------------|

245.° Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

- | | | |
|------------|-----------------------|------------------------|
| 1) 3400; | 4) 0,000008; | 7) $0,86 \cdot 10^3$; |
| 2) 15; | 5) 0,73; | 8) $0,23 \cdot 10^4$; |
| 3) 0,0046; | 6) $250 \cdot 10^2$; | 9) $9300 \cdot 10^5$. |

246.° Используя стандартный вид числа, запишите:

- 1) скорость света в вакууме равна $300\,000$ км/с;
- 2) высота Говерлы, самой высокой горы Украины, равна 2061 м;
- 3) площадь Украины составляет $603\,700$ км²;
- 4) среднее расстояние от Земли до Солнца составляет $149,6$ млн км;
- 5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет $0,032$ Па;
- 6) диаметр молекулы воды равен $0,00000028$ мм.

247.° Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

- | | | |
|------------|-------------|-------------------------|
| 1) 45 000; | 3) 0,00024; | 5) $0,059 \cdot 10^8$; |
| 2) 260; | 4) 0,032; | 6) $526 \cdot 10^4$. |

248.° Число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $1,6 \cdot 10^3$; | 2) $5,7 \cdot 10^6$; | 3) $2,1 \cdot 10^{-2}$; | 4) $1,1 \cdot 10^{-5}$. |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|

249.° Число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $2,4 \cdot 10^2$; | 2) $4,8 \cdot 10^5$; | 3) $1,4 \cdot 10^{-3}$; | 4) $8,6 \cdot 10^{-4}$. |
|-----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|

250.° Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

251.° Найдите значение выражения:

- 1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$.
- 2) $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$.

252.* Расположите выражения в порядке убывания их значений:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) 4^{-1} , 4^3 , 4^0 , 4^{-2} .

253.* Расположите выражения в порядке возрастания их значений:

1) 7^{-2} , 7^2 , 7^{-1} , 7^0 ; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

254.* Сравните значения выражений:

1) 12^0 и $(-6)^0$; 4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ и 21^{-1} ;
2) $0,2^3$ и $0,2^{-3}$; 5) $5^{-1} - 7^{-1}$ и 2^{-1} ;
3) 4^6 и $0,25^{-6}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

255.* Сравните значения выражений:

1) 3^{-2} и $(-3)^0$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.
2) $3^{-1} + 2^{-1}$ и 5^{-1} ;

256.* Представьте в виде дроби выражение:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$; 4) $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$; 5) $(c^2 - d^2) : (c + d)$;
3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$; 6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

257.* Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2} + a^{-3}$; 3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$; 4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

258.* Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

259.* Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

260.* Какое число больше:

1) $9,7 \cdot 10^{11}$ или $1,2 \cdot 10^{12}$; 3) $2,34 \cdot 10^6$ или $0,23 \cdot 10^7$;
2) $3,6 \cdot 10^{-5}$ или $4,8 \cdot 10^{-6}$; 4) $42,7 \cdot 10^{-9}$ или $0,072 \cdot 10^{-7}$?

261.* Какое число меньше:

1) $6,1 \cdot 10^{19}$ или $6,15 \cdot 10^{18}$; 2) $1,5 \cdot 10^{-9}$ или $0,9 \cdot 10^{-8}$?

 **262.*** В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

Планета	Расстояние, км
Венера	$1,082 \cdot 10^8$
Земля	$1,495 \cdot 10^8$
Марс	$2,280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5,790 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,427 \cdot 10^9$
Уран	$2,871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7,781 \cdot 10^8$

- 1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
- 2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
- 3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

263. В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

Элемент	Масса атома, кг	Элемент	Масса атома, кг
Нитроген	$2,32 \cdot 10^{-26}$	Аурум	$3,27 \cdot 10^{-25}$
Алюминий	$4,48 \cdot 10^{-26}$	Купрум	$1,05 \cdot 10^{-25}$
Водород	$1,66 \cdot 10^{-27}$	Натрий	$3,81 \cdot 10^{-26}$
Гелий	$6,64 \cdot 10^{-27}$	Станум	$1,97 \cdot 10^{-25}$
Железо	$9,28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3,95 \cdot 10^{-25}$

- 1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
- 2) Масса атома какого из элементов, Купрума или Натрия, больше?
- 3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

- 264. В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1,1 \cdot 10^9$	Никель	$6,8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1,3 \cdot 10^6$	Олово	$4,76 \cdot 10^6$
Железо	$8,8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1,15 \cdot 10^5$
Золото	$1,1 \cdot 10^4$	Фосфаты	$1,98 \cdot 10^{10}$
Марганец	$6,35 \cdot 10^8$	Хром	$4,4 \cdot 10^9$
Медь	$2,8 \cdot 10^9$	Цинк	$1,12 \cdot 10^8$

- 1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
- 2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
- 3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

265. Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?
- 266. В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе 2 года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?
267. Дима ходит из дома на стадион пешком со скоростью 4 км/ч. Если он поедет на стадион на велосипеде со скоростью 12 км/ч, то приедет на 20 мин раньше, чем обычно. На каком расстоянии от дома Димы находится стадион?
268. Упростите выражение

$$\frac{2a^2 + 2}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{a - 1} + \frac{3a - 3}{2a + 2}.$$

269. Можно ли утверждать, что при любом натуральном n значение выражения $(5n + 6,5)^2 - (2n + 0,5)^2$ кратно 42?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

270. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

271. Упростите выражение:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

272. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Повторите содержание п. 4 на с. 232.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

273. В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причем у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли взрослых быть больше, чем детей?

9. Свойства степени с целым показателем

В 7 классе вы изучали свойства степени с натуральным показателем. Они справедливы и для степени с любым целым показателем.

Теорема 9.1. Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Теорема 9.2. Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени**. Докажем его. Для натуральных m и n это равенство уже было доказано в курсе алгебры 7 класса.

Рассмотрим теперь случай, когда m и n — целые отрицательные числа.

Если m и n — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$.

$$\text{Имеем: } a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Для завершения доказательства основного свойства степени следует также рассмотреть следующие случаи: один из показателей степени m или n отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) можно доказать аналогично.

С помощью свойства (1) докажем следующую теорему.

Теорема 9.3. Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

Доказательство. Имеем:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \quad \blacktriangle$$

С помощью свойств (2) и (3) докажем следующую теорему.

Теорема 9.4. Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Доказательство. Имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \quad \blacktriangle$$

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем**.

ПРИМЕР 1 Представьте в виде степени с основанием a выражение: 1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Решение. 1) Применив основное свойство степени, получаем:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Используя равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$, получаем:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 2 Найдите значение выражения:

$$1) (5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}; \quad 2) 16^{-9} \cdot 8^{12}; \quad 3) \frac{6^{-3}}{18^{-3}}; \quad 4) \left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}.$$

Решение. 1) Имеем: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$

2) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

3) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27.$

$$4) \left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \\ = \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 3 Упростите выражение: 1) $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;

$$2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6).$$

Решение

$$1) 0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0,2m^{-2}n^{-3}.$$

$$2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 4 Выполните умножение $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

Решение

$$(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = \\ = 23,8 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7. \blacktriangle$$



Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

УПРАЖНЕНИЯ

274.° Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

- | | | |
|--|--------------------------------------|---|
| 1) $a^{-6} \cdot a^9$; | 5) $a^7 : a^{-3}$; | 9) $(a^{-6})^{-8}$; |
| 2) $a^5 \cdot a^{-8}$; | 6) $a^{-3} : a^{-15}$; | 10) $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^3$; |
| 3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$; | 7) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$; | 11) $(a^4 b^{-2} c^3)^{-10}$; |
| 4) $a^{-2} : a^6$; | 8) $(a^{-5})^4$; | 12) $\left(\frac{a^{10} b^{-7}}{c^6 d^{-14}}\right)^{-2}$. |

275.° Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

- | | | |
|--------------------------|--|--|
| 1) $a^6 \cdot a^{-10}$; | 4) $(a^{-2})^6$; | 7) $a^{-16} \cdot a^8 : a^{-4}$; |
| 2) $a^4 : a^7$; | 5) $(a^{-3} b^{-1} c^7)^{-4}$; | 8) $(a^{-3})^8 : (a^{-1})^7 \cdot (a^{-7})^{-4}$. |
| 3) $a^{-5} : a^{-9}$; | 6) $\left(\frac{a^2}{bc^{-1}}\right)^{-3}$; | |

276.° Найдите значение выражения:

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| 1) $9^5 \cdot 9^{-7}$; | 4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; | 7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; |
| 2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$; | 5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$; | 8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$. |
| 3) $3^{-18} : 3^{-21}$; | 6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$; | |

277.° Найдите значение выражения:

- | | | |
|--------------------------|---|--|
| 1) $6^{-9} \cdot 6^6$; | 3) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$; | 5) $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$; |
| 2) $7^{-16} : 7^{-18}$; | 4) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$; | 6) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$. |

278.° Упростите выражение:

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| 1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$; | 5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$; | 9) $0,2c^{-3}d^5 \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$; |
| 2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$; | 6) $\frac{kp^{-6}}{k^4 p^4}$; | 10) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$; |
| 3) $(2c^{-6})^4$; | 7) $(c^{-6}d^2)^{-7}$; | 11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$; |
| 4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$; | 8) $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \frac{6}{7}a^7b^4$; | 12) $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$. |

279.° Упростите выражение:

- 1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$; 3) $\frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$; 5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;
 2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$; 4) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$; 6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

280.° Найдите значение выражения:

- 1) $8^{-3} \cdot 2^7$; 4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$; 7) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;
 2) $27^{-2} : 9^{-4}$; 5) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$; 8) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.
 3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6$; 6) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

281.° Найдите значение выражения:

- 1) $9^{-4} \cdot 27^2$; 3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$; 5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;
 2) $32^{-5} : 64^{-4}$; 4) $8^{-2} : 0,5^4$; 6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

282.° Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

- 1) $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$; 4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;
 2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$; 5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;
 3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$; 6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

283.° Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

- 1) $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$; 3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;
 2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

284.° Вынесите за скобки степень с основанием a и наименьшим из данных показателей:

- 1) $a^3 - 2a^4$; 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$; 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

285.* Вынесите за скобки степень с основанием b и наименьшим из данных показателей:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

286.* Представьте в виде произведения выражение:

1) $a^{-2} - 4$; 4) $a^{-3} + b^{-3}$;
 2) $a^{-4}b^{-6} - 1$; 5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
 3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$; 6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

287.* Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^{-4} - 25$; 3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
 2) $m^{-6} - 8n^{-3}$; 4) $a^{-4} - a^{-2}$.

288.* Докажите тождество

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

289.* Упростите выражение:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$; 3) $\frac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;
 2) $\frac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$; 4) $\frac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \frac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

290.* Упростите выражение:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$; 3) $\frac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \frac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;
 2) $\frac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$; 4) $\frac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \frac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

291.* Порядок числа a равен -4 . Определите порядок числа:

1) $10a$; 2) $0,1a$; 3) $100a$; 4) $0,001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

292.* Порядок числа b равен 3 . Определите порядок числа:

1) $10b$; 2) $0,01b$; 3) $0,0001b$; 4) $1000b$.

293.* Выполните вычисления и запишите результат в стандартном виде:

1) $(1,8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$; 3) $\frac{5,4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;
 2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5,2 \cdot 10^{-9})$; 4) $\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$.

294.* Выполните вычисления и запишите результат в стандартном виде:

1) $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$; 3) $\frac{7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-6}}$;
 2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-1})$; 4) $\frac{6,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

295.* Среднее расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^8$ км, а скорость света — $3 \cdot 10^8$ м/с. За сколько минут свет от Солнца достигнет Земли? Ответ округлите до единиц.

296.* Плотность меди равна $8,9 \cdot 10^3$ кг/м³. Найдите массу медной плитки, длина которой $2,5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

297.* Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Луны — $7,4 \cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

298.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

$$1) \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1}} \right) : \left(\frac{b}{a^2} \right)^{-1};$$

$$2) \frac{b^{-2} - 2}{b^{-2}} - \frac{b^{-4} - 4}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-2} - 2};$$

$$3) \frac{5c^{-3}}{c^{-3} - 3} - \frac{c^{-3} + 6}{2c^{-3} - 6} \cdot \frac{90}{c^{-6} + 6c^{-3}};$$

$$4) \left(\frac{m^{-4}}{m^{-4} - 4} - \frac{3m^{-4}}{m^{-8} - 8m^{-4} + 16} \right) \cdot \frac{16 - m^{-8}}{m^{-4} - 7} + \frac{8m^{-4}}{m^{-4} - 4}.$$

299.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

$$1) \frac{a^{-2} + 5}{a^{-4} - 6a^{-2} + 9} : \frac{a^{-4} - 25}{4a^{-2} - 12} - \frac{2}{a^{-2} - 5};$$

$$2) \left(b^{-1} - \frac{5b^{-1} - 36}{b^{-1} - 7} \right) \cdot \left(2b^{-1} + \frac{2b^{-1}}{b^{-1} - 7} \right)^{-1}.$$

300.** Порядок числа a равен -4 , а порядок числа b равен 3 . Каким может быть порядок значения выражения:

- 1) ab ; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0,1b$?

301.** Порядок числа m равен 2 , а порядок числа n равен 4 . Каким может быть порядок значения выражения:

- 1) mn ; 2) $0,01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0,01m + n$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

302. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

303. В результате мероприятий по экономии электроэнергии за первый месяц ее расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?
304. Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может откачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?
305. Тетрадь стоит 19 грн. У покупателя есть купюры только по 5 грн, а у продавца — только по 2 грн. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество купюр соответствующего достоинства должны быть у покупателя и у продавца.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

306. Найдите значение функции $y = -\frac{14}{x}$, если:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3,5$; 4) $x = -6$.

307. Функция задана формулой $y = \frac{x+2}{x-6}$. Какова область определения данной функции? Заполните таблицу, вычислив соответствующие значения функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

308. Постройте график функции $y = 2x - 1$. Проходит ли этот график через точку: 1) $A(30; 59)$; 2) $B(-15; -29)$?
309. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 2,7x - 8$ и $y = 1,2x + 7$.
310. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Повторите содержание пп. 17–19 на с. 236–237.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

311. По окончании теннисного турнира, который проводили по олимпийской системе (проигравший выбывает), оказалось, что только 32 участника выиграли встреч больше, чем проиграли. Сколько теннисистов участвовало в турнире?

10. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

В курсе математики 6 класса вы ознакомились с функциональной зависимостью, при которой с **увеличением (уменьшением)** одной величины в несколько раз другая величина **уменьшается (увеличивается)** во столько же раз. Такую зависимость называют обратной пропорциональностью.

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1 Пусть имеется 500 грн. Обозначим через x грн цену 1 кг товара, а через y кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 500 грн.

Зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью: увеличение цены x в несколько раз приводит к уменьшению количества товара y во столько же раз и, наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y = \frac{500}{x}$. ▲

ПРИМЕР 2 Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см², а стороны — x см и y см. Тогда

$$y = \frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя x в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины y во столько же раз, то есть зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью. ▲

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида

$$y = \frac{k}{x}.$$

Определение. Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **обратной пропорциональностью**.

Поскольку в выражении $\frac{k}{x}$ допустимыми значениями переменной x являются все числа, кроме 0, то областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ также являются все числа, кроме 0.

Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1	1	1,5	2	3	4	6
y	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты (x ; y) которых приведены в таблице (рис. 3).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 4) будет отличаться от графика функции $y = \frac{6}{x}$.

Среди отмеченных точек не может быть точки, абсцисса которой равна нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определе-

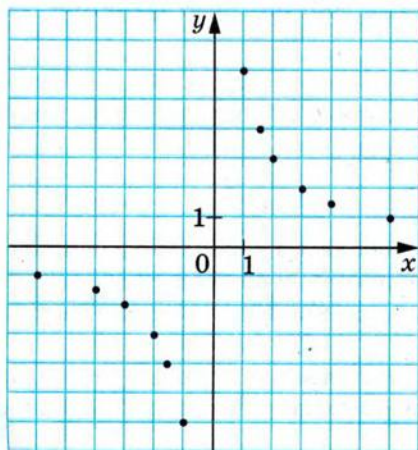


Рис. 3

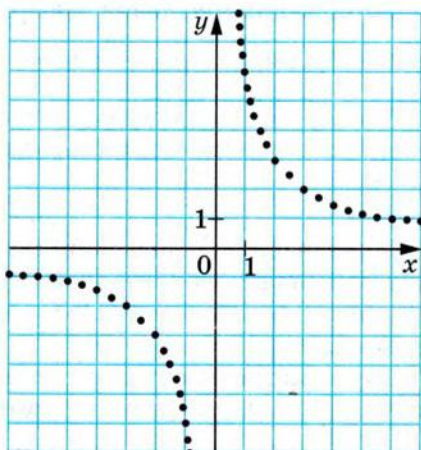


Рис. 4

ния данной функции. Поэтому график функции $y = \frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

Кроме того, этот график не имеет общих точек и с осью абсцисс, то есть точек, ординаты которых равны нулю. Действительно, уравнение $\frac{6}{x} = 0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, то есть $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояния от точек графика функции $y = \frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равны нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

Аналогично можно установить, что с уменьшением модуля абсциссы расстояния от точек графика до оси ординат уменьшаются и могут стать сколь угодно малыми, но никогда не будут равны нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображенную на рисунке 5.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то также верно равенство $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$. Тогда можно сделать следующий вывод: если

точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе.

На рисунке 5 изображена гипербола $y = \frac{6}{x}$.

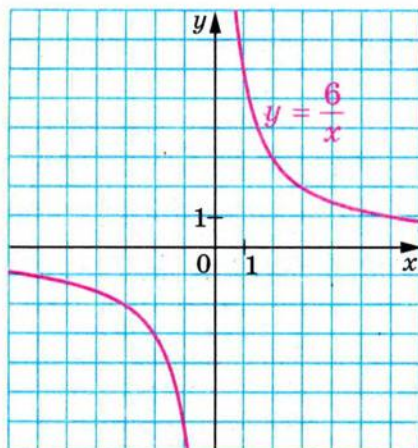


Рис. 5

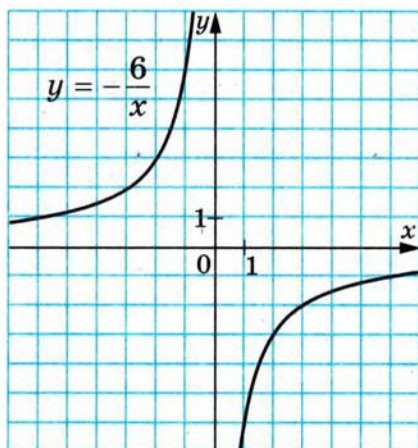


Рис. 6

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображен график функции $y = -\frac{6}{x}$. Ветви гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ расположены во II и IV четвертях.

Заметим, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, являются все числа, кроме 0.

В таблице приведены свойства функции $y = \frac{k}{x}$, изученные в этом пункте.

Область определения	Все числа, кроме 0
Область значений	Все числа, кроме 0
График	Гипербола
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	Не существует
Свойство графика	Если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе.

Покажем, как график функции $y = \frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение. Рассмотрим функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$. Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 7). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и -4. В каждой из точек пересечения графиков значение функции $y = \frac{4}{x}$ равно значению функции $y = x + 3$. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, то есть числа 1 и -4 являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает. Действительно, $\frac{4}{1} = 1 + 3$

и $\frac{4}{-4} = -4 + 3$. ▲

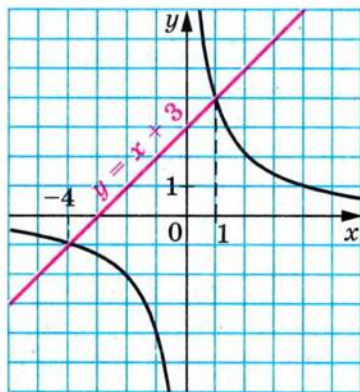


Рис. 7

Описанный метод решения уравнений называют **графическим**. В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда дает точные результаты. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

В дальнейшем (п. 22) вы научитесь решать такие уравнения, не используя графический метод.



1. Объясните, какую зависимость между величинами называют обратной пропорциональностью.
2. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
3. Что является областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
4. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?

5. Как называют части, из которых состоит гипербола?
6. Что является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$? если $k < 0$?
8. Объясните, в чем заключается графический метод решения уравнений.

УПРАЖНЕНИЯ

- 312.° Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это же расстояние, если его скорость:
1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 1,2 раза?
- 313.° Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же самой площади ширину прямоугольника:
1) увеличить в 1,5 раза; 2) уменьшить в 3,2 раза?
- 314.° За некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы за ту же сумму денег, если бы цена за 1 м:
1) уменьшилась в 2,6 раза; 2) увеличилась в 1,6 раза?
- 315.° Пешеход прошел 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

v , км/ч	5		2,4	
t , ч		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулой зависимость t от v .

- 316.° Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3 . Заполните таблицу, в первой строке которой указана площадь его основания, а во второй — высота.

S , см^2	16		240	
h , см		8		4,8

Задайте формулой зависимость h от S .

- 317.° Бригада из семи рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

318.° Заготовленных кормов хватит для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

319.° Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

- 1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;
2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

320.° Задана функция $y = \frac{24}{x}$. Найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно: -3; 6; 0,2;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; -6; 100.

321.° Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно: -4; 0,9; 18;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; -0,3; 8.

322.° Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно: 4, -1;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2, -8;
- 3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

323.° Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно: 2, -10;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5, -2;
- 3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

324.° Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

- 1) A (-4; -7); 2) B (14; -2); 3) C (0,5; 14); 4) D (0,2; 140).

325.° Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{48}{x}$, определите, проходит ли график через точку:

- 1) A (-6; -8); 2) B (12; -4); 3) C (0,3; -16); 4) D (0,4; -120).

326.* На рисунке 8 изображен график зависимости времени t движения из пункта A в пункт B от скорости v движения. Пользуясь графиком, определите:

- 1) за какое время можно добраться из пункта A в пункт B , если скорость движения равна 8 км/ч; 24 км/ч;
- 2) какой должна быть скорость движения, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 3 ч; за 4 ч;
- 3) чему равно расстояние между пунктами A и B .

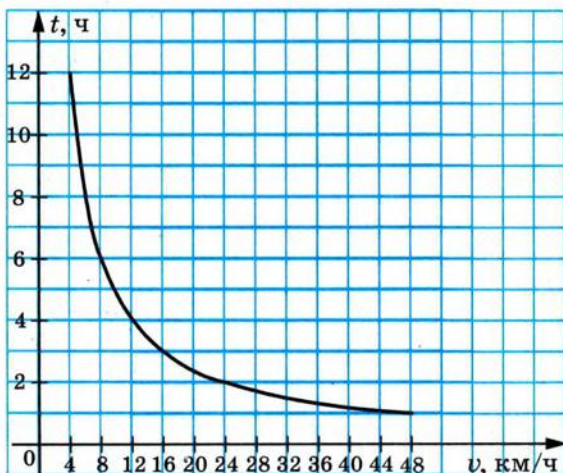


Рис. 8

327.* Проволочный реостат подключен к блоку питания (рис. 9). Сопротивление реостата R зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока I от сопротивления R при условии, что напряжение на концах реостата остается неизменным (рис. 10), определите:

- 1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;
- 2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;
- 3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

328.* Найдите значение k , при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

- 1) $A(-5; 4)$;
- 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$;
- 3) $C(1,5; -8)$.

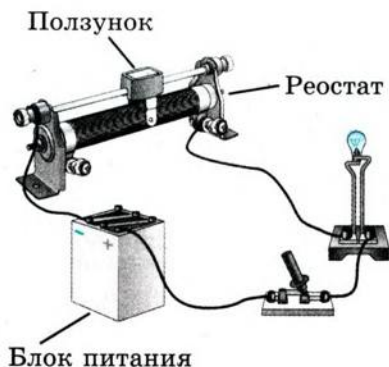


Рис. 9

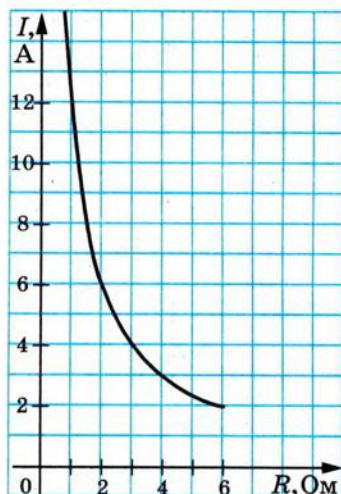


Рис. 10

- 329.*** График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10; 1,6)$. Проходит ли график этой функции через точку:
 1) $B(-1; -16)$; 2) $C(-2; 8)$?

- 330.*** Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

- 331.*** Решите графически уравнение:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

- 332.*** Решите графически уравнение:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

- 333.*** Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

- 334.*** Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

- 335.*** Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

336.* Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

337.** Найдите координаты всех точек графика функции $y = \frac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

338.** Найдите координаты всех точек графика функции $y = -\frac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

339.** Постройте график функции $y = \frac{6}{|x|}$.

340.** Постройте график функции:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ x+3, & \text{если } x > -1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} -2x+10, & \text{если } x \leq 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{если } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{если } x \geq 4. \end{cases}$$

341.** Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{если } x < -2, \\ 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

342.** Постройте график функции:

$$1) y = \frac{9x-18}{x^2-2x}; \quad 2) y = \frac{5x^2-5}{x-x^3}.$$

343.** Постройте график функции $y = \frac{10x^2-40}{x^3-4x}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

344. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении

$$\frac{a^2-b^2}{a+3b} \cdot \left(\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} + \frac{b}{a^2-b^2} \right) - \frac{b}{a-b},$$

его значение не зависит от значений переменных.

345. Решите уравнение

$$\frac{3}{5x+25} + \frac{1}{2x-10} = \frac{5}{x^2-25}.$$

346. Цену шкафа снизили на 30 %, а спустя некоторое время повысили на 30 %. Как изменилась — увеличилась или уменьшилась — цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

347. (Задача Сунь-Цзы¹.) Двое мужчин получили монеты, которые они должны разделить между собой так, что если бы к монетам, которые получит первый из них, прибавить половину монет второго или к монетам, которые получит второй, прибавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях получилось бы 48 монет.

Сколько монет должен получить каждый из мужчин?

348. Если лыжник будет двигаться со скоростью 10 км/ч, то доберется в пункт назначения на 1 ч позже запланированного времени прибытия, а если будет двигаться со скоростью 15 км/ч — то на 1 ч раньше. С какой скоростью он должен двигаться, чтобы прибыть в пункт назначения в запланированное время?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

349. Каждый из трех учеников написал по 100 разных слов. После этого одинаковые слова вычеркнули. В результате у первого ученика осталось 45 слов, у второго — 68, а у третьего — 78. Докажите, что по крайней мере одно слово записали все трое.

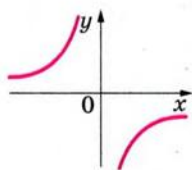
¹ Сунь-Цзы — китайский математик, живший в III или IV в. н. э.

ЗАДАНИЕ № 3 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

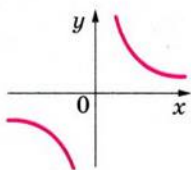
1. Решите уравнение $\frac{x^2-100}{x-10}=0$.
А) -10; 10; Б) 10; В) -10; Г) корней нет.
2. Решите уравнение $\frac{x-10}{x^2-100}=0$.
А) -10; 10; Б) 10; В) -10; Г) корней нет.
3. Какое из данных равенств верно?
А) $10^{-3} = -1000$; В) $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$;
Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{16}$; Г) $\frac{1}{7^{-2}} = -49$.
4. Как записывают в стандартном виде число 42 000?
А) $4,2 \cdot 10^3$; В) $0,42 \cdot 10^5$;
Б) $4,2 \cdot 10^4$; Г) $42 \cdot 10^3$.
5. Как записывают в виде десятичной дроби число $6,3 \cdot 10^3$?
А) 0,63; В) 0,0063;
Б) 0,063; Г) 0,00063.
6. Представьте число $\frac{1}{25}$ в виде степени с основанием 5.
А) 5^{-2} ; Б) 5^2 ; В) 5^{-3} ; Г) 5^3 .
7. Чему равно значение выражения $(1,7 \cdot 10^8) \cdot (6 \cdot 10^{-3})$?
А) $1,02 \cdot 10^5$; В) $10,2 \cdot 10^6$;
Б) $1,02 \cdot 10^6$; Г) $1,02 \cdot 10^7$.
8. Найдите значение выражения $\frac{9^{-2} \cdot 3^{-5}}{81 \cdot 27^{-3}}$.
А) 81; Б) $\frac{1}{81}$; В) 27; Г) $\frac{1}{27}$.
9. Какая из данных функций не является обратной пропорциональностью?
А) $y = \frac{3}{x}$; Б) $y = -\frac{3}{x}$; В) $y = \frac{3}{2x}$; Г) $y = \frac{3x}{2}$.

10. На одном из рисунков изображен график функции $y = -\frac{4}{x}$.

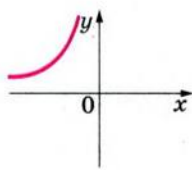
Укажите этот рисунок.



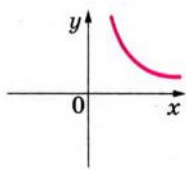
A)



Б)



В)



Г)

11. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-3; 0,6)$?

A) $-1,8$;

Б) $-0,2$;

В) $-2,4$;

Г) $-3,6$.

12. Решите уравнение $\frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x+1}{4-x} = \frac{4x^2+8}{x^2-16}$.

A) $0; 4$;

Б) $-4; 0$;

В) -4 ;

Г) 0 .

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 1

Рациональное выражение

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

Допустимые значения переменных

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Тождественно равные выражения

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

Тождество

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

Основное свойство рациональной дроби

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же.

Умножение рациональных дробей

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Деление рациональных дробей

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

Возведение рациональной дроби в степень

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

Равносильные уравнения

Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.

Свойства уравнений

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рациональное уравнение

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.

Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a , не равного нулю, и натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степень с показателем, равным нулю

Для любого числа a , не равного нулю, $a^0 = 1$.

Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.

Свойства степени с целым показателем

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ (основное свойство степени);}$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Функция обратная пропорциональности

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

Область определения: все числа, кроме 0.

Область значений: все числа, кроме 0.

График: гипербола.

Ноль функции: не существует.

Свойство графика: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе

$y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ также принадлежит этой гиперболе.

§ 2

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- Изучая материал этого параграфа, вы ознакомитесь с функцией $y = x^2$ и ее свойствами.
- Узнаете о новом действии «извлечение квадратного корня». Вы убедитесь, что для изучения окружающего мира только рациональных чисел недостаточно.
- Вы ознакомитесь с новым математическим понятием — арифметическим квадратным корнем, узнаете о его свойствах. Научитесь упрощать выражения, содержащие квадратные корни.

11. Функция $y = x^2$ и ее график

Обозначим через y площадь квадрата со стороной x . Тогда $y = x^2$.

С изменением стороны x квадрата соответственно будет изменяться и его площадь y .

Понятно, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y . Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = x^2$ задает функцию.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, областью определения которой являются все числа. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых $(x; y)$ возьмем из таблицы (рис. 11).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, будет отмечено, тем меньше полученная фигура (рис. 12) будет отличаться от графика функции $y = x^2$.

Пара чисел $(0; 0)$ является решением уравнения $y = x^2$. Следовательно, график данной функции проходит через начало координат.

нат. Поскольку $y = x^2$ и $x^2 \geq 0$, то $y \geq 0$, то есть среди отмеченных точек не может быть точек с отрицательными ординатами.

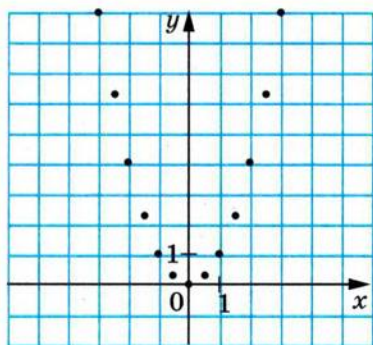


Рис. 11

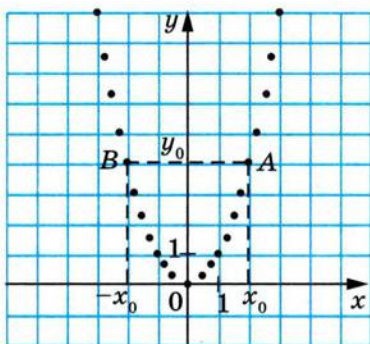


Рис. 12

Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, то получилась бы фигура — график функции $y = x^2$, которую называют **параболой** (рис. 13).

Точка с координатами $(0; 0)$ делит параболу на две равные части, каждую из которых называют **ветвью параболы**, а саму точку — **вершиной параболы**.

Заметим, что если верно равенство $y_0 = x_0^2$, то верно и равенство $y_0 = (-x_0)^2$. Тогда можно сделать такой вывод: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит параболе $y = x^2$, то точка $B(-x_0; y_0)$ также принадлежит этой параболе.

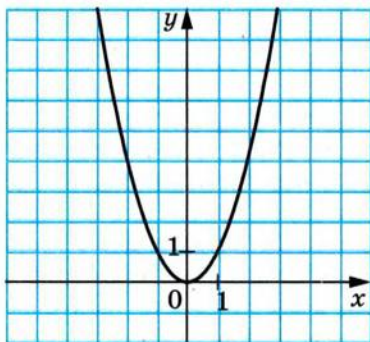


Рис. 13

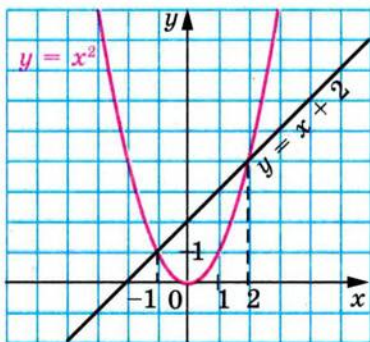


Рис. 14

В таблице приведены свойства функции $y = x^2$, изученные в этом пункте.

Область определения	Все числа
Область значений	Все неотрицательные числа
График	Парабола
Ноль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$
Свойство графика	Если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит параболе $y = x^2$, то точка $B(-x_0; y_0)$ также принадлежит этой параболе.

ПРИМЕР Решите графически уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$ (рис. 14). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 2 и -1 . Следовательно, как при $x = 2$, так и при $x = -1$ значения выражений x^2 и $x + 2$ равны, то есть числа 2 и -1 являются корнями уравнения $x^2 = x + 2$. Проверка это подтверждает. Действительно, $2^2 = 2 + 2$ и $(-1)^2 = -1 + 2$. ▲



1. Что является областью определения функции $y = x^2$?
2. Что является областью значений функции $y = x^2$?
3. При каком значении аргумента значение функции $y = x^2$ равно нулю?
4. Сравните значения функции $y = x^2$ при противоположных значениях аргумента.
5. Какая фигура является графиком функции $y = x^2$?

УПРАЖНЕНИЯ

350.° Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

- 1) значение функции, если значение аргумента равно: -6 ; $0,8$; $-1,2$; 150 ;
- 2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 49 ; 0 ; 2500 ; $0,04$.

351.° Не выполняя построения графика функции $y = x^2$, определите, проходит ли этот график через точку:

- 1) $A(-8; 64)$; 2) $B(-9; -81)$; 3) $C(0,5; 2,5)$; 4) $D(0,1; 0,01)$.

352.* Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4x - 4$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

353.* Решите графически уравнение:

$$1) x^2 = x - 1; \quad 2) x^2 - 2x - 3 = 0; \quad 3) x^2 = \frac{8}{x}.$$

354.* Решите графически уравнение:

$$1) x^2 = -4x - 3; \quad 2) x^2 - 3x + 5 = 0; \quad 3) x^2 + \frac{1}{x} = 0.$$

355.* Установите графически количество решений системы уравнений:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$$

356.* Установите графически количество решений системы уравнений:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

357.** Функция f задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{если } x \leq -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0,5)$.

2) Постройте график данной функции.

358.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$

1) Найдите $f(-4)$, $f(-0,3)$, $f(1,9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

359.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

1) Найдите $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

360.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0,9)$, $f(3)$, $f(0)$.

2) Постройте график данной функции.

361.* Постройте график функции:

1) $y = \frac{x^3 + x^2}{x+1};$

2) $y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}.$

362.* Постройте график функции $y = \frac{x^3}{x}.$

363.* Найдите область определения, область значений и нули функции $y = -x^2$. Постройте график этой функции.

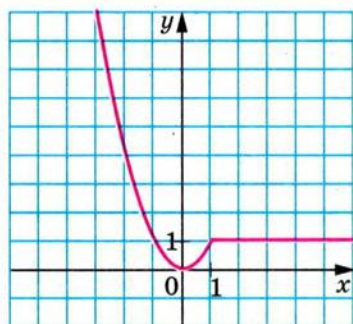
364.* Постройте график уравнения:

1) $\frac{y-x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0;$

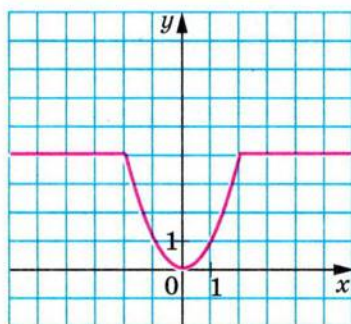
2) $\frac{y-x^2}{y-x} = 0.$

365.* Постройте график уравнения $\frac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0.$

366.* Задайте с помощью формул функцию, график которой изображен на рисунке 15.



a



б

Рис. 15

367.* Задайте с помощью формул функцию, график которой изображен на рисунке 16.

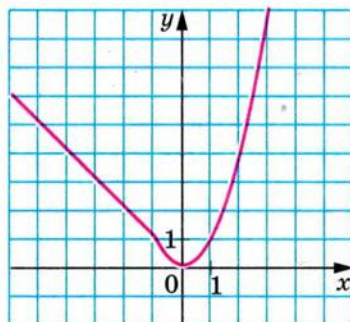


Рис. 16

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

368. Докажите тождество $\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right) = a+b$.

369. Решите уравнение $\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}$.

370. Докажите, что значение выражения $27^6 - 9^7$ кратно 48.

371. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого пешехода.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

372. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна: 1) 25 см^2 ; 2) 1600 дм^2 ; 3) $0,04 \text{ м}^2$.

373. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$;

2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

374. При каких значениях a уравнение $x^2 = a$ не имеет корней?

375. Постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 1$ и найдите координаты их общих точек.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

376. Натуральные числа x, y, z таковы, что значения выражений $x+y, y+z, x+z$ — простые числа. Докажите, что среди чисел x, y, z есть по крайней мере два числа, равные 1.

12. Квадратные корни.

Арифметический квадратный корень

Рассмотрим квадрат, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Пусть длина его стороны составляет x единиц. Тогда уравнение $x^2 = 49$ можно рассматривать как математическую модель задачи о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам.

Корнями этого уравнения являются числа 7 и -7 . Говорят, что числа 7 и -7 являются **квадратными корнями** из числа 49.

Определение. Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a .

Приведем несколько примеров.

Квадратными корнями из числа 9 являются числа 3 и -3 . Действительно, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратными корнями из числа $\frac{25}{4}$ являются числа $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

Действительно, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0. Действительно, существует лишь одно число, квадрат которого равен нулю, — это число 0.

Поскольку не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу, то квадратного корня из отрицательного числа не существует.

Положительный корень уравнения $x^2 = 49$, число 7, является ответом в задаче о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам. Это число называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 49.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от лат. *radix* — корень).

Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из a », опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b-5$ является подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что *подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения*.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{9} = 3$, так как $3 \geq 0$ и $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, так как $\frac{5}{2} \geq 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geq 0$ и $0^2 = 0$.

Вообще, равенство $\sqrt{a} = b$ выполняется при условии, что $b \geq 0$ и $b^2 = a$.

Этот вывод можно представить в другой форме: для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a} \geq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.

Например, $\sqrt{4} \geq 0$ и $(\sqrt{4})^2 = 4$, $\sqrt{2} \geq 0$ и $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\sqrt{5,2} \geq 0$ и $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$.

Подчеркнем, что к понятию квадратного корня мы пришли, решая уравнение вида $x^2 = a$, где $a \geq 0$. Корни этого уравнения — числа, каждое из которых является квадратным корнем из числа a .

Поиск корней уравнения $x^2 = a$ проиллюстрируем, решив графически уравнение $x^2 = 4$.

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 4$ (рис. 17). Точки пересечения этих графиков имеют абсциссы 2 и -2, которые и являются корнями данного уравнения.

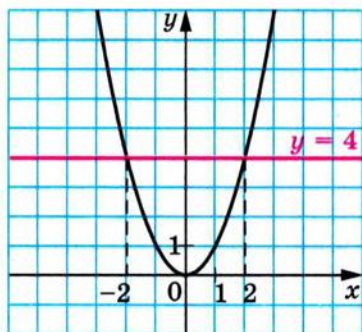


Рис. 17

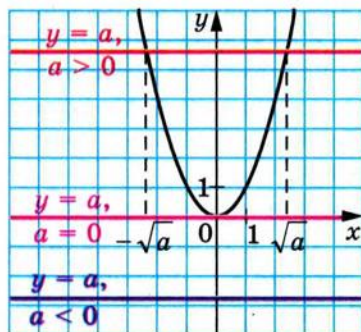


Рис. 18

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, что подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = a$ при $a < 0$ общих точек не имеют (рис. 18).

При $a = 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень $x = 0$, что также подтверждается графически: графики функций $y = x^2$ и $y = 0$ имеют только одну общую точку (рис. 18).

Графический метод также позволяет сделать следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Действительно, парабола $y = x^2$ и прямая $y = a$, где $a > 0$, имеют две общие

точки (рис. 18). При этом корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Действительно, $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Например, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

ПРИМЕР 1 Найдите значение выражения $(-8\sqrt{2})^2$.

Решение. Применив правило возведения произведения в степень и тождество $(\sqrt{a})^2 = a$, получим:

$$(-8\sqrt{2})^2 = (-8)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangle$$

ПРИМЕР 2 Решите уравнение: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2$.

Решение. 1) Имеем: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тогда $x = 6^2$; $x = 36$.

Ответ: 36.

2) $\sqrt{1+\sqrt{x+2}} = 2$; $1+\sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x+2 = 3^2$; $x = 7$.

Ответ: 7. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $(x-5)^2 = 16$.

Решение. $(x-5)^2 = 16$;

$$x-5 = -4 \text{ или } x-5 = 4;$$

$$x = 1 \text{ или } x = 9.$$

Ответ: 1; 9. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $(3x-1)^2 = 2$.

Решение. $(3x-1)^2 = 2$;

$$3x-1 = -\sqrt{2} \text{ или } 3x-1 = \sqrt{2};$$

$$3x = 1-\sqrt{2} \text{ или } 3x = 1+\sqrt{2};$$

$$x = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ или } x = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 5 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$?

Решение. 1) Выражение $\sqrt{-5x}$ имеет смысл, если подкоренное выражение $-5x$ принимает неотрицательные значения. Подкоренное выражение является произведением двух множителей, один из которых — отрицательное число. Следовательно, это произведение

будет принимать неотрицательные значения, если другой множитель x будет принимать неположительные значения.

Ответ: при $x \leq 0$.

2) Данное выражение имеет смысл, если выполняются два условия: имеет смысл выражение $\sqrt{x}$ и знаменатель $\sqrt{x}-2$ отличен от нуля. Следовательно, должны одновременно выполняться два условия: $x \geq 0$ и $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Отсюда $x \geq 0$ и $x \neq 4$.

Ответ: при $x \geq 0$ и $x \neq 4$. ▲

ПРИМЕР 6 Решите уравнение: 1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2$;

2) $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x-2} = 0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2} = 0$.

Решение. 1) Левая часть данного уравнения имеет смысл, если подкоренные выражения $-x$ и $x-2$ одновременно принимают неотрицательные значения. Из того, что первое подкоренное выражение должно быть неотрицательным, получаем: $-x \geq 0$, тогда $x \leq 0$. Однако если $x \leq 0$, то второе подкоренное выражение, $x-2$, принимает только отрицательные значения. Следовательно, левая часть данного уравнения не имеет смысла.

Ответ: корней нет.

2) Левая часть данного уравнения является суммой двух слагаемых, каждое из которых может принимать только неотрицательные значения. Тогда их сумма будет равна нулю, если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, одновременно должны выполняться два условия: $\sqrt{x^2-2x} = 0$ и $\sqrt{x-2} = 0$. Это означает, что надо найти общие корни полученных уравнений, то есть решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2-2x=0, \\ x-2=0; \end{cases} \begin{cases} x(x-2)=0, \\ x=2; \end{cases} \begin{cases} x=0 \text{ или } x=2, \\ x=2. \end{cases}$

Решением последней системы, а значит, и исходного уравнения, является число 2.

Ответ: 2.

3) Используя условие равенства произведения нулю, получаем:

$$\begin{aligned} x+2 &= 0 \text{ или } \sqrt{x-2} = 0; \\ x &= -2 \text{ или } x = 2. \end{aligned}$$

Однако при $x = -2$ выражение $\sqrt{x-2}$ не имеет смысла. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень — число 2.

Ответ: 2. ▲



1. Что называют квадратным корнем из числа a ?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a ?
3. Как обозначают арифметический квадратный корень из числа a ?
4. Как называют знак $\sqrt{\quad}$?
5. Как читают запись $\sqrt{a}$?
6. Как называют выражение, стоящее под радикалом?
7. Какие значения может принимать подкоренное выражение?
8. Как называют действие нахождения арифметического квадратного корня из числа?
9. Чему равно значение выражения $(\sqrt{a})^2$ для любого неотрицательно-го числа a ?
10. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$? Чему они равны?
11. Имеет ли корни уравнение $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

УПРАЖНЕНИЯ

377.° Чему равен квадратный корень из числа 16? из числа 1? из числа 0? Чему равен арифметический квадратный корень из этих чисел?

378.° Верно ли равенство (ответ обоснуйте):

- | | | |
|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\sqrt{25} = 5$; | 3) $\sqrt{36} = -6$; | 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$; |
| 2) $\sqrt{0} = 0$; | 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; | 6) $\sqrt{10} = 100$? |

379.° Найдите значение арифметического квадратного корня:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{9}$; | 5) $\sqrt{0,25}$; | 9) $\sqrt{400}$; | 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; |
| 2) $\sqrt{49}$; | 6) $\sqrt{0,01}$; | 10) $\sqrt{3600}$; | 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; |
| 3) $\sqrt{100}$; | 7) $\sqrt{1,21}$; | 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; | 15) $\sqrt{0,0004}$; |
| 4) $\sqrt{225}$; | 8) $\sqrt{1,96}$; | 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; | 16) $\sqrt{0,000025}$. |

380.° Найдите значение арифметического квадратного корня:

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{36}$; | 4) $\sqrt{0,04}$; | 7) $\sqrt{2500}$; | 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; |
| 2) $\sqrt{64}$; | 5) $\sqrt{0,49}$; | 8) $\sqrt{10\,000}$; | 11) $\sqrt{0,0009}$; |
| 3) $\sqrt{144}$; | 6) $\sqrt{1,69}$; | 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; | 12) $\sqrt{0,0196}$. |

381.° Имеет ли смысл выражение:

- 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $(\sqrt{-2})^2$?

382.° Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен:

- 1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) -9.

383.° Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, приведенной на форзаце, найдите:

- 1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;
2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;
3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

384.° Найдите:

- 1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;
2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

385.° Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

- 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1,8}$; 5) $\sqrt{2,439}$.

386.° Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

387.° Найдите значение выражения:

- 1) $(\sqrt{7})^2$; 4) $-(\sqrt{10})^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
2) $(\sqrt{4,2})^2$; 5) $(2\sqrt{3})^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;
3) $(-\sqrt{11})^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $(-0,3\sqrt{2})^2$.

388.° Вычислите:

- 1) $(\sqrt{6})^2$; 3) $(3\sqrt{2})^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;
2) $(-\sqrt{21})^2$; 4) $(-4\sqrt{5})^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

389.° Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt{16+9}$; 3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$;
2) $\sqrt{16+\sqrt{9}}$; 4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$;

5) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$;

9) $(\sqrt{13})^2 - 3 \cdot (\sqrt{8})^2$;

6) $\sqrt{0,81} + \sqrt{0,01}$;

10) $\frac{1}{6} \cdot (\sqrt{18})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$;

11) $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

8) $-2\sqrt{0,16} + 0,7$;

12) $\sqrt{4 \cdot 5^2 - 6^2}$.

390.° Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{3 + \sqrt{36}}$;

4) $\frac{1}{3}\sqrt{900} + 0,2\sqrt{1600}$;

2) $\sqrt{72 - \sqrt{64}}$;

5) $(2\sqrt{6})^2 - 3(\sqrt{21})^2$;

3) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{225}$;

6) $\sqrt{10^2 - 4 \cdot 3^2}$.

391.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12 + a}$, если $a = 0,25$;

2) $\sqrt{7 - 3b}$, если $b = 2$;

3) $\sqrt{2a - b}$, если $a = 34$, $b = 19$;

4) $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$, если $a = -\frac{1}{2}$, $b = -0,19$, $c = 0,18$, $d = 0,04$.

392.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27 + m}$, если $m = 54$;

2) $\sqrt{m - 3n}$, если $m = 0,13$, $n = -0,04$.

393.° Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 9$;

2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;

3) $\sqrt{x} - 0,2 = 0$;

4) $\sqrt{x} + 7 = 0$.

394.° Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 20$;

2) $\sqrt{x} = -16$;

3) $\sqrt{x} - \frac{2}{3} = 0$.

395.° Решите уравнение:

1) $x^2 = 25$;

2) $x^2 = 0,49$;

3) $x^2 = 3$;

4) $x^2 = -25$.

396.° Решите уравнение:

1) $x^2 = 100$;

2) $x^2 = 0,81$;

3) $x^2 = 7$;

4) $x^2 = 3,6$.

397.° Найдите значение выражения:

1) $-0,06 \cdot \sqrt{10\,000} + \frac{8}{\sqrt{256}} - 2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6,25} + \sqrt{2^3 + 17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + 3\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$;

5) $(3\sqrt{8})^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{24})^2$;

6) $\sqrt{144} : \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{2500}$.

398. Найдите значение выражения:

1) $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + (10\sqrt{0,08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : (0,1\sqrt{13})^2$.

399. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-8}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 13) $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$;

2) $\sqrt{-x}$; 6) $\sqrt{8-x}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$; 14) $\sqrt{|x|}$;

3) $\sqrt{x^2}$; 7) $\sqrt{x^2+8}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;

4) $\sqrt{-x^2}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 12) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$; 16) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$?

400. При каких значениях y имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{y-1}}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$?

401. Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x} - 4 = 0$; 3) $\sqrt{5x-4} = 6$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$;

2) $\sqrt{5x-4} = 0$; 4) $\frac{42}{\sqrt{x}} = 6$; 6) $\sqrt{x^2-36} = 8$.

402.* Решите уравнение:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$;

3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$;

4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

403.* Решите уравнение:

1) $(x+6)^2=0$; 2) $(x+6)^2=9$; 3) $(x+6)^2=3$; 4) $(7x+6)^2=5$.

404.* Решите уравнение:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

405.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

406.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{17+\sqrt{x}}-6=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

407.** При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

408.** Можно ли утверждать, что при любом значении x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$; 2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

409.** Докажите, что не существует такого значения x , при котором имеет смысл выражение $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

410.** Какое из данных выражений имеет смысл при любом значении x :

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$; 2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

411.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x$; 4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$; 5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;

3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$; 6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

412.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$; 3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;

2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$; 4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

413.** При каких значениях a уравнение $x^2=a+1$:

- 1) имеет два корня;
- 2) имеет один корень;
- 3) не имеет корней?

414.** Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{-x^2}$; 2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$; 3) $y=(\sqrt{x})^2$.

415.* Постройте график функции $y = \sqrt{2x-1-x^2} - 1$.

416.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1} = 0$;

3) $a\sqrt{x-1} = a$;

2) $\sqrt{(a-1)x} = 0$;

4) $\sqrt{x-2} = a$.

417.* При каких значениях a уравнение $(\sqrt{x}-1)(x-a) = 0$ имеет только один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

418. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 24. Сколько раз цифра 1 встречается в нумерации?

419. Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{a^2-25} + \frac{5}{5-a} + \frac{1}{a+5} \right) : \left(\frac{28-a^2}{a+5} + a-5 \right).$$

420. Рабочий получил 4700 грн аванса купюрами по 100 грн и по 500 грн. Сколько было купюр каждого номинала, если всего была 31 купюра?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

421. Найдите все трехзначные натуральные числа n такие, что сумма цифр числа n в 11 раз меньше самого числа n .

Растут ли в огороде радикалы?



В Древней Греции действие извлечения корня отождествляли с поиском стороны квадрата по его площади, а сам квадратный корень называли «стороной».

В Древней Индии слово «мула» означало «начало», «основание», «корень дерева». Это же слово стали употреблять и по отношению к стороне квадрата, возможно, исходя из такой ассоциации: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Вероятно, поэтому в латинском языке понятия «сторона» и «корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова произошел термин «радикал».

Слово *radix* можно также перевести как «редис», то есть корнеплод — часть растения — видоизмененный корень, который может являться съедобным.

В XIII–XV вв. европейские математики, сокращая слово *radix*, обозначали квадратный корень знаками R , $\mathcal{R}$, R^2 . Например, запись $\sqrt{7}$ имела следующий вид: R^27 .

В XVI в. стали использовать знак $\sqrt{}$. Происхождение этого символа, по-видимому, связано с рукописным начертанием латинской буквы *r*.

В XVII в. выдающийся французский математик Рене Декарт, соединив знак $\sqrt{}$ с горизонтальной черточкой, получил символ $\sqrt{}$, который мы и используем сегодня.



Рене Декарт
(1596–1650)

Первая задача первой математической олимпиады в Украине



Задача 391 (4) заслуживает внимания еще и потому, что в 1935 г. именно ее условием открывался текст первой математической олимпиады в Украине. Инициатором этих математических соревнований был выдающийся украинский математик, академик Михаил Филиппович Кравчук¹.

С тех пор прошло более 80 лет, и за это время математические олимпиады стали для многих талантливых школьников первым шагом на пути к научному творчеству. Сегодня такие имена, как А. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. А. Красносельский, В. Г. Дринфельд, известны всему научному миру. Эти выдающиеся ученые в разные годы были победителями математических олимпиад в Украине.

С удовлетворением отмечаем, что и сейчас математические олимпиады в Украине очень популярны. Десятки тысяч школьников нашей страны на различных этапах участвуют в этих математических соревнованиях. В организации и проведении олимпиад задействованы лучшие ученые, методисты, учителя. Именно благодаря их энтузиазму и профессионализму команда Украины достойно представляет нашу страну на международных математических олимпиадах.

Советуем и вам, дорогие восьмиклассники, участвовать в математических олимпиадах.

¹ На первом форзаце учебника изображен памятник М. Ф. Кравчуку, установленный на территории Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». На базе этого учебного заведения один раз в два года проводятся Международные математические конференции имени академика М. Ф. Кравчука.

13. Множество и его элементы. Подмножество

Мы часто говорим: стадо баранов, букет цветов, коллекция марок, косяк рыб, стая птиц, рой пчел, собрание картин, набор ручек, компания друзей.

Если в этих парах перемешать первые слова, то может получиться смешно: букет баранов, косяк картин, стадо друзей. В то же время такие словосочетания, как коллекция рыб, коллекция птиц, коллекция картин, коллекция ручек и т. д., вполне приемлемы. Дело в том, что слово «коллекция» достаточно универсальное. Однако в математике есть термин, которым можно заменить любое из первых слов в данных парах. Это слово **множество**.

Приведем еще несколько примеров множеств:

- множество учеников вашего класса;
- множество планет Солнечной системы;
- множество двузначных чисел;
- множество пар чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 1$.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ)**;
- множество значений аргумента функции f — **область определения функции f** , которую обозначают $D(f)$;
- множество значений функции f — **область значений функции f** , которую обозначают $E(f)$.

Как правило, множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т. д.

Объекты, составляющие данное множество, называют **элементами** этого множества. Обычно элементы обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d и т. д.

Если a — элемент множества A , то пишут: $a \in A$ (читают: « a принадлежит множеству A »). Если b не является элементом множества A , то пишут: $b \notin A$ (читают: « b не принадлежит множеству A »).

Если множество A состоит из трех элементов a, b, c , то пишут: $A = \{a, b, c\}$.

Если M — множество натуральных делителей числа 6, то пишут: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множество делителей числа 6, являющихся

составными числами, имеет следующий вид: $\{6\}$. Это пример **одноэлементного** множества.

Задавать множество с помощью фигурных скобок, в которых указан список его элементов, удобно в тех случаях, когда множество состоит из небольшого количества элементов.

Определение. Два множества A и B называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A принадлежит множеству B и, наоборот, каждый элемент множества B принадлежит множеству A .

Если множества A и B равны, то пишут: $A = B$.

Из определения следует, что *множество однозначно определяется своими элементами*. Если множество записано с помощью фигурных скобок, то порядок, в котором выписаны его элементы, не имеет значения. Так, для множества, состоящего из трех элементов a, b, c , существует шесть вариантов его записи:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Поскольку из определения равных множеств следует, что, например, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то в дальнейшем будем рассматривать множества, состоящие из разных элементов. Так, множество букв слова «космодром» имеет вид $\{к, о, с, м, д, р\}$.

Заметим, что $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Действительно, множество $\{a\}$ состоит из одного элемента a ; множество $\{\{a\}\}$ состоит из одного элемента — множества $\{a\}$.

Чаще всего множество задают одним из следующих двух способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Мы уже использовали этот способ, записывая множество с помощью фигурных скобок, в которых указывали список его элементов. Ясно, что не всякое множество можно задать таким способом. Например, множество четных чисел так задать невозможно.

Второй способ состоит в том, что указывают **характеристическое свойство** элементов множества, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Например, свойство «натуральное число при делении на 2 дает в остатке 1» задает множество нечетных чисел.

Если задавать множество характеристическим свойством его элементов, то может оказаться, что ни один объект этим свойством не обладает.

Обратимся к примерам.

- Множество треугольников, стороны которых пропорциональны числам 1, 2, 5. Из неравенства треугольника следует, что это множество не содержит ни одного элемента.
- Обозначим через A множество учеников вашего класса, являющихся мастерами спорта по шахматам. Может оказаться, что множество A также не содержит ни одного элемента.
- Рассматривая множество корней произвольного уравнения, следует предусмотреть ситуацию, когда уравнение корней не имеет.

Приведенные примеры указывают на то, что удобно к совокупности множеств отнести еще одно особенное множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют **пустым множеством** и обозначают символом $\emptyset$.

Заметим, что множество $\{\emptyset\}$ не является пустым. Оно содержит один элемент — пустое множество.

Рассмотрим множество цифр десятичной системы счисления: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выделим из множества A его элементы, являющиеся четными цифрами. Получим множество $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, все элементы которого являются элементами множества A .

Определение. Множество B называют **подмножеством** множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B является подмножеством множества A » или «множество A содержит множество B »).

Рассмотрим примеры:

- множество учеников вашего класса является подмножеством множества учеников вашей школы;
- множество млекопитающих является подмножеством множества позвоночных;
- множество точек луча CB является подмножеством множества точек прямой AB (рис. 19);



Рис. 19

- множество прямоугольников является подмножеством множества параллелограммов;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, которые называют **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 20 изображены множество A (большой круг) и множество B (меньший круг, содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$ (или $A \supset B$).

Из определений подмножества и равенства множеств следует, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Если в множестве B нет элемента, не принадлежащего множеству A , то множество B является подмножеством множества A . В силу этих соображений пустое множество считают подмножеством любого множества. Действительно, пустое множество не содержит ни одного элемента, следовательно, в нем нет элемента, который не принадлежит данному множеству A . Поэтому для любого множества A справедливо утверждение: $\emptyset \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

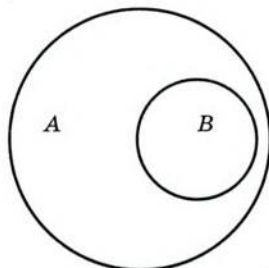


Рис. 20

ПРИМЕР Выпишите все подмножества множества $A = \{a, b, c\}$.

Решение. Имеем: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\emptyset$. ▲



1. Как обозначают множество и его элементы?
2. Как обозначают область определения и область значений функции?
3. Как записать, что элемент принадлежит (не принадлежит) множеству A ?
4. Какие множества называют равными?
5. Какие существуют способы задания множеств?
6. Какое множество называют пустым? Как его обозначают?
7. Какое множество называют подмножеством данного множества?
8. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
9. Какое множество является подмножеством любого множества?

УПРАЖНЕНИЯ

- 422.°** Как называют множество точек угла, равноудаленных от его сторон?
- 423.°** Как называют множество волков, подчиняющихся одному вожаку?

- 424.°** Назовите какое-нибудь множество учеников вашей школы.
- 425.°** Как называют множество учителей, работающих в одной школе?
- 426.°** Дана функция $f(x) = x^2$. Поставьте вместо звездочки знак $\in$ или $\notin$ так, чтобы получить верное утверждение:
- 1) $3 * D(f)$; 2) $0 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.
- 427.°** Какие из следующих утверждений верны:
- 1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$; 5) $\emptyset \notin \{1, 2\}$;
2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$; 6) $\emptyset \in \{\emptyset\}$?
- 428.°** Запишите множество корней уравнения:
- 1) $x(x-1) = 0$; 3) $x = 2$;
2) $(x-2)(x^2-4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.
- 429.°** Задайте с помощью перечисления элементов множество:
- 1) правильных дробей со знаменателем 7;
2) правильных дробей, знаменатель которых не больше 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.
- 430.°** Назовите несколько подмножеств учащихся вашего класса.
- 431.°** Пусть A — множество букв слова «координата». Множество букв какого из слов является подмножеством множества A :
- 1) нора; 4) крокодил; 7) дар; 10) дорога;
2) трактор; 5) нитки; 8) подарок; 11) корона;
3) картина; 6) корка; 9) ордината; 12) кардинал?
- 432.°** Пусть A — множество цифр числа 1958. Является ли множество цифр числа x подмножеством множества A , если:
- 1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\,888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\,258$?
- 433.°** Пусть $A \neq \emptyset$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество A ?
- 434.°** Равны ли множества A и B , если:
- 1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$; 3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
- 435.°** Равны ли множества A и B , если:
- 1) A — множество корней уравнения $|x| = x$, B — множество неотрицательных чисел;
2) A — множество четырехугольников, у которых противоположные стороны попарно равны; B — множество четырехугольников, у которых диагонали точкой пересечения делятся пополам?

436.* Какие из данных множеств равны пустому множеству:

- 1) множество треугольников, сумма углов которых равна 181° ;
- 2) множество горных вершин высотой более 8800 м;
- 3) множество остроугольных треугольников, медиана которых равна половине стороны, к которой она проведена;
- 4) множество функций, графиками которых являются окружности?

437.* Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

438.* Разместите данные множества в такой последовательности, чтобы каждое следующее множество было подмножеством предыдущего:

- 1) A — множество прямоугольников, B — множество четырехугольников, C — множество квадратов, D — множество параллелограммов;
- 2) A — множество млекопитающих, B — множество псовых, C — множество позвоночных, D — множество волков, E — множество хищных млекопитающих.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

439. Упростите выражение:

$$1) \frac{5b}{b-3} - \frac{b+6}{2b-6} \cdot \frac{90}{b^2+6b}; \quad 2) \frac{b+2}{b^2-2b+1} : \frac{b^2-4}{3b-3} - \frac{3}{b-2}.$$

440. Моторная лодка проплыла 36 км по течению реки за 3 ч и 36,8 км против течения за 4 ч. Какова скорость течения реки?

441. В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 — красные, 16 — синие, а остальные — зеленые. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

442. Петя и Дима ежедневно записывают по одному числу. В первый день каждый из мальчиков записал число 1. В каждый последующий день Петя записывает число 1, а Дима — число, равное сумме чисел, записанных мальчиками в предыдущие дни. Может ли в какой-то день Дима записать число, запись которого оканчивается на 101?

14. Числовые множества

Натуральные числа — это первые числа, которыми начали пользоваться люди. С ними вы ознакомились в детстве, когда учились считать предметы. Все натуральные числа образуют **множество натуральных чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{N}$.

Практические потребности людей привели к возникновению дробных чисел. Позже появилась необходимость рассматривать величины, для характеристики которых положительных чисел оказалось недостаточно. Так возникли отрицательные числа.

Все натуральные числа, противоположные им числа и число нуль образуют **множество целых чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{Z}$.

Например, $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, то есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Целые и дробные (как положительные, так и отрицательные) числа образуют **множество рациональных чисел**, которое обозначают буквой $\mathbb{Q}$. Например, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-0,2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

Понятно, что $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Схема, изображенная на рисунке 21, показывает, как соотносятся множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

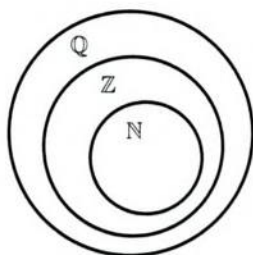


Рис. 21

Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое

число, а n — натуральное. Например, $5 = \frac{5}{1}$,

$-3 = \frac{-3}{1}$, $0,2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5,3 = \frac{53}{10}$. С возмож-

ностью такого представления связано название «рациональное число»: одним из значений латинского слова *ratio* является «отношение».

В 6 классе вы узнали, что каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такое представление можно получить, выполнив деление числа m на число n уголком.

Например, $\frac{5}{8} = 0,625$, $\frac{5}{11} = 0,454545\dots$

Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число

$\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби. В запи-

си $0,454545\dots$ цифры 4 и 5 периодически повторяются. Повторяющуюся группу цифр называют **периодом дроби** и записывают в круглых скобках. В данном случае период дроби составляет 45,

а дробь $\frac{5}{11}$ записывают так: $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Заметим, что любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$0,625 = 0,6250000\dots = 0,625(0);$$

$$2 = 2,000\dots = 2,(0).$$

Следовательно, *каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Справедливо и такое утверждение: *каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.*

В 9 классе вы научитесь записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

Сумма и произведение двух натуральных чисел являются натуральными числами. Однако разность натуральных чисел не всегда обладает таким свойством. Например, $(5-7) \notin \mathbb{N}$.

Сумма, разность, произведение двух целых чисел являются целыми числами. Однако частное целых чисел не всегда обладает

таким свойством. Например, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Сумма, разность, произведение и частное (кроме деления на нуль) двух рациональных чисел являются рациональными числами.

Итак, действие вычитания натуральных чисел может вывести результат за пределы множества $\mathbb{N}$, действие деления целых чисел — за пределы множества $\mathbb{Z}$, однако выполнение любого из четырех арифметических действий с рациональными числами не выводит результат за пределы множества $\mathbb{Q}$.

Вы ознакомились с новым действием — извлечением квадратного корня. Возникает естественный вопрос: всегда ли квадратный корень из неотрицательного рационального числа является рациональным числом? Иными словами, может ли действие извлечения

квадратного корня из рационального числа вывести результат за пределы множества $\mathbb{Q}$?

Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Поскольку $2 > 0$, то это уравнение имеет два корня: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ (рис. 22). Однако *не существует рационального числа, квадрат которого равен 2* (доказательство этого факта вы можете найти в рубрике «Когда сделаны уроки» в рассказе «Открытие иррациональности»), то есть числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не являются рациональными. Эти числа — примеры **иррациональных чисел** (приставка «ир» означает отрицание).

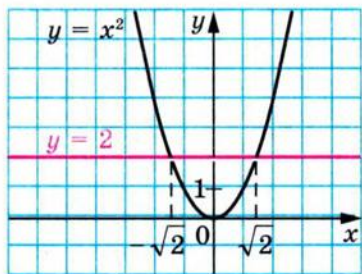


Рис. 22

Следовательно, действие извлечения корня из рационального числа может вывести результат за пределы множества $\mathbb{Q}$.

Ни одно иррациональное число не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональные числа могут быть представлены в виде **бесконечных непериодических** десятичных дробей.

Например, с помощью специальной компьютерной программы можно установить, что

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ — это не первые иррациональные числа, с которыми вы встречаетесь. Число π , равное отношению длины окружности к диаметру, также является иррациональным:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937\dots$$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно конструировать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число $0,10100100010000100000\dots$ (после запятой записаны последовательно степени числа 10) является иррациональным. Действительно, если предположить, что у рассматриваемой десятичной дроби есть период, состоящий из n цифр, то с некоторого места этот период будет полностью состоять из нулей. Иными словами, начиная с этого места в записи не должна встретиться ни одна единица, что противоречит конструкции числа.

Вместе множества иррациональных и рациональных чисел образуют **множество действительных чисел**. Его обозначают буквой $\mathbb{R}$ (первой буквой латинского слова *realis* — «реальный», «существующий в действительности»).

Теперь «цепочку» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ можно продолжить: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Связь между числовыми множествами, рассмотренными в этом пункте, иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 23.



Рис. 23

Длину любого отрезка можно выразить действительным числом. Этот факт позволяет установить связь между множеством $\mathbb{R}$ и множеством точек координатной прямой. Точке O , началу отсчета, поставим в соответствие число 0. Каждой точке A координатной прямой, отличной от точки O , поставим в соответствие единственное число, равное длине отрезка OA , если точка A расположена справа от точки O , и число, противоположное длине отрезка OA , если точка A расположена слева от точки O . Также понятно, что каждое действительное число является соответствующим единственной точке координатной прямой.

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение, деление (кроме деления на ноль), в результате будем получать действительное число. Эти действия обладают известными вам свойствами:

$a + b = b + a$	Переместительное свойство сложения
$ab = ba$	Переместительное свойство умножения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сочетательное свойство сложения
$(ab) c = a (bc)$	Сочетательное свойство умножения
$a (b + c) = ab + ac$	Распределительное свойство умножения относительно сложения

Действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, то есть сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7,853126... < 7,853211... .$

Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, у которого модуль меньше.

Если отметить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет расположено слева от большего.

Находя длину окружности и площадь круга, вы пользовались **приближенным значением числа π** (например, $\pi \approx 3,14$). Аналогично при решении практических задач, где нужно выполнить действия с действительными числами, при необходимости эти числа заменяют их приближенными значениями. Например, для числа $\sqrt{2}$ можно воспользоваться такими приближенными равенствами: $\sqrt{2} \approx 1,414$ или $\sqrt{2} \approx 1,415$. Первое из них называют приближенным значением числа $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 0,001, второе — приближенным значением числа $\sqrt{2}$ по избытку с точностью до 0,001. Более подробно о приближенных значениях вы узнаете в 9 классе.

В заключение подчеркнем, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень и в результате этого действия получить действительное число. Следовательно, действие извлечения квадратного корня из неотрицательного действительного числа не выводит результат за пределы множества $\mathbb{R}$.



1. Какие числа образуют множество целых чисел?
2. Какой буквой обозначают множество целых чисел?
3. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
4. Какой буквой обозначают множество рациональных чисел?
5. В виде какого отношения можно представить каждое рациональное число?
6. Как связаны между собой рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби?
7. Как называют числа, не являющиеся рациональными?
8. Какие множества образуют вместе множество действительных чисел?
9. Какой буквой обозначают множество действительных чисел?
10. Как взаимосвязаны числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$?

УПРАЖНЕНИЯ

443.° Какое из данных утверждений неверно:

- 1) -3 — действительное число; 3) -3 — целое число;
2) -3 — рациональное число; 4) -3 — натуральное число?

444.° Верно ли утверждение:

- 1) $1 \in \mathbb{N}$; 4) $1 \in \mathbb{R}$; 7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$; 5) $-2,3 \in \mathbb{N}$; 8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$; 6) $-2,3 \in \mathbb{R}$; 9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

445.° Верно ли утверждение:

- 1) $0 \in \mathbb{N}$; 4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$; 7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
2) $0 \notin \mathbb{Z}$; 5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$; 8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$?
3) $0 \in \mathbb{R}$; 6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;

446.° Верно ли утверждение:

- 1) любое натуральное число является целым;
2) любое натуральное число является рациональным;
3) любое натуральное число является действительным;
4) любое рациональное число является целым;
5) любое действительное число является рациональным;
6) любое рациональное число является действительным;
7) любое иррациональное число является действительным;
8) любое действительное число является либо рациональным, либо иррациональным?

447.° Какие из данных бесконечных дробей являются записями рациональных чисел, а какие — иррациональных:

- 1) $0,(3)$;
2) $0,4(32)$;
3) $0,20200200020\dots$ (количество нулей между соседними двойками последовательно увеличивается на 1)?

448.° Сравните:

- 1) $6,542\dots$ и $6,452\dots$; 2) $-24,064\dots$ и $-24,165\dots$

449.° Сравните:

- 1) $0,234\dots$ и $0,225\dots$; 2) $-1,333\dots$ и $-1,345\dots$

■ 450.° С помощью микрокалькулятора найдите приближенное значение числа $\sqrt{3}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

451.° С помощью микрокалькулятора найдите приближенное значение числа $\sqrt{5}$ с точностью до 0,01: 1) по недостатку; 2) по избытку.

452.° Укажите какое-нибудь значение a , при котором уравнение $x^2 = a$:

- 1) имеет два рациональных корня;
- 2) имеет два иррациональных корня;
- 3) не имеет корней.

453.° Сравните числа:

- 1) $\frac{43}{7}$ и 6,12;
- 2) 3,(24) и 3,24;
- 3) π и 3,(14);
- 4) $-2,(36)$ и $-2,36$;
- 5) 7,(18) и 7,(17).

454.° Сравните числа:

- 1) $\frac{1}{6}$ и 0,2;
- 2) $\frac{7}{9}$ и 0,77;
- 3) $-1,(645)$ и $-1,(643)$.

455.° Запишите в порядке убывания числа 3,(16); π ; $-1,82\dots$; $-0,08\dots$; 2,(136).

456.° Запишите в порядке возрастания числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

457.** Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами.

458.** Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел является иррациональным числом.

459.** Верно ли, что:

- 1) сумма любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;
- 2) произведение любых двух иррациональных чисел является иррациональным числом;
- 3) произведение любого иррационального числа и любого рационального числа является иррациональным числом?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

460. В каждом подъезде на каждом этаже девятиэтажного дома по восемь квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира № 186?

461. Натуральные числа a и b таковы, что a — четное число, а b — нечетное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:

- 1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

462. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2} + \frac{2}{a^2-4} \right) \cdot (a-2)^2 - \frac{2a-4}{a+2}$$

не зависит от значения a .

463. В ведре несколько литров воды. Если отлить половину воды, то в нем останется на 14 л воды меньше, чем помещается в ведре. Если долить 4 л, то объем воды составит $\frac{2}{3}$ того, что помещается в ведре. Сколько литров воды помещается в ведре?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

464. Найдите значение выражения:

- 1) $|-3,5| - |2,6|$; 2) $|-9,6| - |-32|$.

465. Модуль какого числа равен 6?

466. Для каких чисел выполняется равенство:

- 1) $|a| = a$; 3) $|a| = |-a|$;
2) $|a| = -a$; 4) $|a| = -|a|$?

467. Для каких чисел одновременно выполняются оба равенства $|a| = a$ и $|a| = -a$?

468. Найдите значение каждого из выражений a^2 , $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a = -8$ и при $a = 7$. Сделайте вывод.

469. Известно, что $a > 0$, $c < 0$. Сравните с нулем значение выражения:

- 1) a^3c^4 ; 2) ac^5 .

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

470. В роте 100 солдат. Каждую ночь на дежурство выходят три солдата. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый солдат побывал на дежурстве с каждым из остальных солдат ровно один раз?

Открытие иррациональности



В п. 14, решая графически уравнение $x^2 = 2$, мы установили, что длина каждого из отрезков OA и OB равна $\sqrt{2}$ (рис. 24). Покажем, что число $\sqrt{2}$ иррациональное.

Предположим, что число $\sqrt{2}$ рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Имеем:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Тогда } (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2; \quad 2 = \frac{m^2}{n^2}; \quad m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что число m^2 четное. А это значит, что четным является и число m . Тогда $m = 2k$, где k — некоторое натуральное число. Имеем: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что число n^2 , а следовательно, и число n четные.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — четные числа. Следовательно, эта дробь является сократимой. Получили противоречие.

Приведенный пример показывает, что существуют отрезки (в нашем случае это отрезки OA и OB на рисунке 24), длины которых нельзя выразить рациональными числами, то есть для измерения отрезков рациональных чисел недостаточно.

Этот факт был открыт в школе великого древнегреческого ученого Пифагора.

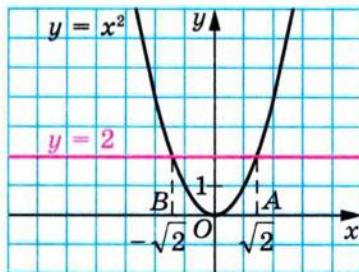


Рис. 24



Пифагор

(ок. 570 — ок. 500 г. до н. э.)

Сначала пифагорейцы считали, что для любых отрезков AB и CD всегда можно найти такой отрезок MN , который в каждом из них укладывается целое число раз. Отсюда следовало, что отношение длин любых двух отрезков выражается отношением целых чисел, то есть рациональным числом.

Например, на рисунке 25 имеем: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Отрезок MN называют **общей мерой** отрезков AB и CD .

Если для отрезков существует общая мера, то их называют **соизмеримыми**. Например, отрезки AB и CD (рис. 25) являются соизмеримыми.

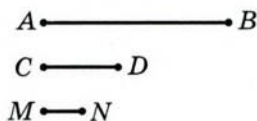


Рис. 25

Итак, древнегреческие ученые считали, что любые два отрезка соизмеримы. А из этого следовало, что длину любого отрезка можно выразить рациональным числом.

Действительно, пусть некоторый отрезок AB выбран в качестве единичного. Тогда для отрезка AB и любого другого отрезка CD существует отрезок длиной e , являющийся их общей мерой. Получаем: $AB = ne$, $CD = me$, где m и n — некоторые натуральные числа. Отсюда $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Поскольку $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Однако сами же пифагорейцы сделали выдающееся открытие. Они доказали, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы, то есть если сторону квадрата принять за единицу, то длину диагонали квадрата выразить рациональным числом нельзя.

Для доказательства рассмотрим произвольный квадрат $ABCD$ и примем его сторону за единицу длины. Тогда его площадь равна $AB^2 = 1$. На диагонали AC построим квадрат $ACEF$ (рис. 26). Понятно, что площадь квадрата $ACEF$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$. Отсюда $AC^2 = 2$, то есть $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, длина диагонали AC не может быть выражена рациональным числом.

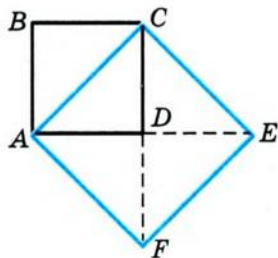


Рис. 26

Это открытие изменило один из фундаментальных постулатов древнегреческих ученых, заключавшийся в том, что отношение любых двух величин выражается отношением целых чисел.

Существует легенда о том, что пифагорейцы держали открытие иррациональных чисел в строжайшей тайне, а человека, разгласившего этот факт, покарали боги: он погиб при кораблекрушении.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что число $\sqrt{3}$ иррациональное.
2. Докажите, что если натуральное число n не является квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ иррациональное.

15. Свойства арифметического квадратного корня

Легко проверить, что $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1,4^2} = 1,4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Может показаться, что при любом значении a выполняется равенство $\sqrt{a^2} = a$. Однако это не так. Например, равенство $\sqrt{(-5)^2} = -5$ является ошибочным, поскольку $-5 < 0$. На самом деле $\sqrt{(-5)^2} = 5$. Также можно убедиться, что, например, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$.

Вообще, справедлива следующая теорема.

Теорема 15.1. Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство. Для того чтобы доказать равенство $\sqrt{a^2} = b$, надо показать, что $b \geq 0$ и $b^2 = a^2$.

Имеем: $|a| \geq 0$ при любом a .

Также из определения модуля следует, что $|a|^2 = a^2$. ▲

Следующая теорема обобщает доказанный факт.

Теорема 15.2 (арифметический квадратный корень из степени). Для любого действительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.1. Проведите это доказательство самостоятельно.

Теорема 15.3 (арифметический квадратный корень из произведения). Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. Имеем: $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$. Тогда $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Кроме того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Следовательно, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает только неотрицательные значения, и его квадрат равен ab . ▲

Эту теорему можно обобщить для произведения трех и более множителей. Например, если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $c \geq 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Теорема 15.4 (арифметический квадратный корень из дроби). Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.3. Проведите это доказательство самостоятельно.

Понятно, что из двух квадратов с площадями S_1 и S_2 (рис. 27) большую сторону имеет тот, у которого площадь больше, то есть если $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Это очевидное сообра-

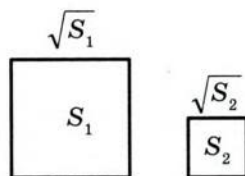


Рис. 27

жжение иллюстрирует такое свойство арифметического квадратного корня: для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

ПРИМЕР 1 Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$;

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Решение. 1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44$.

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5$.

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$. ▲

ПРИМЕР 2 Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Решение. 1) Заменяв произведение корней корнем из произведения, получим:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Заменяв частное корней корнем из частного (дроби), получим:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 3 Упростите выражение: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, если $a \leq 0$; 3) $\sqrt{m^2 n^2}$, если $m \geq 0$, $n \leq 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Решение. 1) По теореме об арифметическом квадратном корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{если } a \geq 0, \\ -a^7, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

2) Имеем: $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Поскольку по условию $a \leq 0$, то $a^3 \leq 0$. Тогда

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) Имеем: $\sqrt{m^2 n^2} = |m| \cdot |n|$. Поскольку по условию $m \geq 0$, то $|m| = m$. Поскольку $n \leq 0$, то $|n| = -n$. Следовательно,

$$|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn.$$

4) Имеем: $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Поскольку $a^{18} \geq 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 4 Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$.

Решение. 1) Преобразовав подкоренное выражение по формуле разности квадратов, получаем:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37 - 12)(37 + 12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) Представив подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел, получаем:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4} = \sqrt{169 \cdot 0,04} = 13 \cdot 0,2 = 2,6$. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 5 Постройте график функции

$$y = \sqrt{x^2} + x.$$

Решение.

Поскольку $\sqrt{x^2} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Если $x \geq 0$, то $y = x + x = 2x$.

Если $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Следовательно, $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

График функции изображен на рисунке 28. ▲

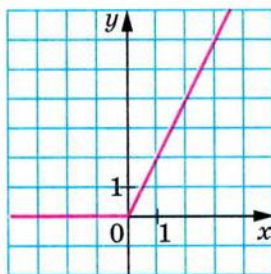


Рис. 28

?

1. Какому выражению тождественно равно выражение $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из степени.
3. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из произведения.
4. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из дроби.
5. Известно, что неотрицательные числа a_1 и a_2 таковы, что $a_1 > a_2$. Сравните значения выражений $\sqrt{a_1}$ и $\sqrt{a_2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

471.° Чему равно значение выражения:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\sqrt{0,4^2}$; | 4) $3\sqrt{1,2^2}$; | 7) $5\sqrt{(-10)^4}$; |
| 2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; | 5) $\sqrt{6^4}$; | 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$; |
| 3) $2\sqrt{(-15)^2}$; | 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; | 9) $-10\sqrt{3^6}$? |

472.° Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt{a^2}$, если $a = 4,6; -18,6$; 3) $0,1\sqrt{c^6}$, если $c = -2; 5$.
 2) $\sqrt{b^4}$, если $b = -3; 1,2$;

473.° Вычислите значение выражения:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sqrt{9 \cdot 25}$; | 3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$; | 5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$; |
| 2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$; | 4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$; | 6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$; |

7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$;

11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;

15) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$;

8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

16) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$;

9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$;

13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$;

10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$;

14) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;

474.° Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{36 \cdot 81}$;

5) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$;

9) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$;

2) $\sqrt{900 \cdot 49}$;

6) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$;

10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$;

7) $\sqrt{4^4 \cdot 3^2}$;

11) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$;

4) $\sqrt{9 \cdot 1,69}$;

8) $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$;

12) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$;

475.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$;

4) $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$;

7) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$;

5) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$;

8) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;

3) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$;

6) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$;

9) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$;

476.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;

3) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,1}$;

5) $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{2,8}$;

2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{50}$;

6) $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$;

477.° Найдите значение частного:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$;

5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;

7) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$;

4) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$;

6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;

8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$;

478.° Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;

2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$;

3) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$;

4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;

5) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

479.* При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^2} = a$;

2) $\sqrt{a^2} = -a$?

480.* При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;

3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

481.* Найдите значение выражения, представив предварительно подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел:

1) $\sqrt{18 \cdot 32}$;

4) $\sqrt{75 \cdot 48}$;

7) $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$;

2) $\sqrt{8 \cdot 98}$;

5) $\sqrt{288 \cdot 50}$;

8) $\sqrt{80 \cdot 45}$;

3) $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$;

6) $\sqrt{4,5 \cdot 72}$;

9) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

482.* Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$;

3) $\sqrt{14,4 \cdot 0,9}$;

5) $\sqrt{12,5 \cdot 32}$;

2) $\sqrt{3,6 \cdot 0,4}$;

4) $\sqrt{13 \cdot 52}$;

6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

483.* Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$;

3) $\sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$;

5) $\sqrt{\frac{155^2 - 134^2}{84}}$;

2) $\sqrt{145^2 - 144^2}$;

4) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$;

6) $\sqrt{\frac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$.

484.* Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$;

2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$;

3) $\sqrt{\frac{98}{228^2 - 164^2}}$.

485.* Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $\sqrt{b^2}$;

2) $-0,4 \sqrt{c^2}$;

3) $\sqrt{a^6}$;

4) $\sqrt{m^8}$.

486.* Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $1,2 \sqrt{x^2}$;

2) $\sqrt{y^4}$;

3) $\sqrt{n^{10}}$.

487.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{m^2}$, если $m > 0$;

6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, если $b \leq 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, если $y \geq 0$;

3) $\sqrt{16p^2}$, если $p \geq 0$;

8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, если $a \leq 0$, $b \geq 0$;

4) $\sqrt{0,36k^2}$, если $k \leq 0$;

9) $-1,2x \sqrt{64x^{18}}$, если $x \leq 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

10) $\frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, если $b < 0$;

$$11) \frac{3,3a^4}{b^3} \sqrt{\frac{b^{24}}{121a^{26}}}, \text{ если } a < 0; \quad 12) -0,5m^5 \sqrt{1,96m^6n^8}, \text{ если } m \leq 0.$$

488.* Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{9a^{16}}; & 5) \sqrt{p^6q^8}, \text{ если } p \geq 0; \\ 2) \sqrt{0,81d^6}, \text{ если } d \geq 0; & 6) \sqrt{25m^{34}n^{38}}, \text{ если } m \leq 0, n \leq 0; \\ 3) -5\sqrt{4x^2}, \text{ если } x \leq 0; & 7) ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}, \text{ если } b \geq 0, c \leq 0; \\ 4) -0,1\sqrt{100z^{10}}, \text{ если } z \geq 0; & 8) -\frac{8m^3p^4}{k^2} \sqrt{\frac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}, \\ & \text{если } m < 0, k > 0. \end{array}$$

489.** Какие из данных равенств выполняются при всех действительных значениях a :

$$1) \sqrt{a^2} = a; \quad 2) \sqrt{a^4} = a^2; \quad 3) \sqrt{a^6} = a^3; \quad 4) \sqrt{a^8} = a^4?$$

490.** При каких значениях a выполняется равенство:

$$1) \sqrt{a^{10}} = a^5; \quad 2) \sqrt{a^{10}} = -a^5; \quad 3) \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2; \quad 4) \sqrt{a^2} = (\sqrt{-a})^2?$$

491.** Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \sqrt{x^2} - x, \text{ если } x \leq 0; & 3) y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}; \\ 2) y = 2x + \sqrt{x^2}; & 4) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3. \end{array}$$

492.** Постройте график функции:

$$1) y = \sqrt{x^2} - 2x, \text{ если } x \geq 0; \quad 2) y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}.$$

493.* При каком значении x выполняется равенство:

$$1) \sqrt{x^2} = x - 4; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6 - x; \quad 3) 2\sqrt{x^2} = x + 3?$$

494.* Решите уравнение:

$$1) \sqrt{x^2} = x + 8; \quad 2) \sqrt{x^2} = 6x - 10.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

495. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25} \right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

при $a = 4,5$.

496. Тракторист должен был засеять поле за 8 дней. Однако из-за плохой погоды он засеивал ежедневно на 3 га меньше нормы и поэтому выполнил работу за 10 дней. Какова площадь поля?

497. Натуральное число a — четное, а число b — нечетное. Значением какого из данных выражений обязательно является четное число:

- 1) $(a + b)b$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) $\frac{a^2b}{2}$; 4) $\frac{ab^2}{2}$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

498. На доске записаны 102 последовательных натуральных числа. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом (в каждой группе должно быть не менее двух чисел)?

16. Тожественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни

Пользуясь теоремой об арифметическом квадратном корне из произведения, преобразуем выражение $\sqrt{48}$. Имеем:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Выражение $\sqrt{48}$ мы представили в виде произведения рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют **вынесением множителя из-под знака корня**. В данном случае был вынесен из-под знака корня множитель 4.

Рассмотрим выполненное преобразование в обратном порядке:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют **внесением множителя под знак корня**. В данном случае был внесен под знак корня множитель 4.

ПРИМЕР 1 Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, если $a < 0$.

Решение. 1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является квадратом рационального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

$$2) \sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$$

3) Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то из условия следует, что $b \geq 0$. Тогда

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}| \sqrt{b} = b^{17} \sqrt{b}.$$

4) Из условия следует, что $b \leq 0$. Тогда

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}| \sqrt{-b} = -b^{17} \sqrt{-b}.$$

5) Из условия следует, что $a^2 > 0$. Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то получаем, что $b \geq 0$. Тогда

$$\sqrt{a^2 b^3} = \sqrt{a^2 b^2 b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab \sqrt{b}. \quad \blacktriangle$$

ПРИМЕР 2 Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt{7}$;

2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Решение. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Если $a \geq 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; если $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) Из условия следует, что $b \leq 0$. Тогда $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{3b^3}$.

4) Из условия следует, что $c \geq 0$. Тогда $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 3 Упростите выражение: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$; 3) $(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})$.

Решение. 1) Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} &= \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = \\ &= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3+2-10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}; \end{aligned}$$

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$.

3) Применяя формулы сокращенного умножения (квадрат двучлена и произведение разности и суммы двух выражений), получим:

$$\begin{aligned} (7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5}) &= 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \\ &- ((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4 Разложите на множители выражение: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, если $b \geq 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Решение. 1) Представив данное выражение в виде разности квадратов, получим:

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}).$$

2) Поскольку по условию $b \geq 0$, то $b - 4 = (\sqrt{b})^2 - 4 = (\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2)$.

3) Применим формулу квадрата разности:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = (3\sqrt{c})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{c} - \sqrt{5})^2.$$

4) Имеем: $a + \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$.

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3})$.

6) $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$. ▲

ПРИМЕР 5 Сократите дробь: 1) $\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$,

если $a > 0$, $b > 0$.

Решение. 1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b})^2 - 1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b}-1.$$

$$2) \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-3.$$

3) Поскольку по условию $a > 0$ и $b > 0$, то числитель и знаменатель данной дроби можно разложить на множители и полученную дробь сократить:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}. \quad \blacktriangle$$

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби означает преобразовать дробь так, чтобы ее знаменатель не содержал квадратного корня.

ПРИМЕР 6 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби: 1) $\frac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Решение. 1) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $5\sqrt{2}+1$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{14}{5\sqrt{2}-1} &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2-1} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1} = \\ &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49} = \frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИМЕР 7 Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Решение.
$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \\ &= \frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} = \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{a} + \sqrt{b}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8 Упростите выражение $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

Решение. Представив подкоренное выражение в виде квадрата суммы, получаем:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{9+2 \cdot 3\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = |3+\sqrt{3}| = 3+\sqrt{3}. \quad \blacktriangle$$

УПРАЖНЕНИЯ

499.° Вынесите множитель из-под знака корня:

- | | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|------------------------|
| 1) $\sqrt{8}$; | 4) $\sqrt{54}$; | 7) $\sqrt{275}$; | 10) $\sqrt{0,48}$; |
| 2) $\sqrt{12}$; | 5) $\sqrt{490}$; | 8) $\sqrt{108}$; | 11) $\sqrt{450}$; |
| 3) $\sqrt{32}$; | 6) $\sqrt{500}$; | 9) $\sqrt{0,72}$; | 12) $\sqrt{36\,300}$. |

500.° Упростите выражение:

- 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

501.° Вынесите множитель из-под знака корня:

- | | | | |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{27}$; | 4) $\sqrt{125}$; | 7) $-2\sqrt{0,18}$; | 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$; |
| 2) $\sqrt{24}$; | 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; | 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; | 11) $10\sqrt{0,03}$; |
| 3) $\sqrt{20}$; | 6) $0,4\sqrt{250}$; | 9) $0,8\sqrt{1250}$; | 12) $0,7\sqrt{1000}$. |

502.° Внесите множитель под знак корня:

- | | | | |
|--------------------|---------------------|-------------------------------|---|
| 1) $7\sqrt{2}$; | 4) $-10\sqrt{14}$; | 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; | 10) $-0,3\sqrt{10b}$; |
| 2) $3\sqrt{13}$; | 5) $5\sqrt{8}$; | 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; | 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; |
| 3) $-2\sqrt{17}$; | 6) $6\sqrt{a}$; | 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; | 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$. |

503.° Внесите множитель под знак корня:

- | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 1) $2\sqrt{6}$; | 3) $-11\sqrt{3}$; | 5) $-7\sqrt{3c}$; | 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$; |
| 2) $9\sqrt{2}$; | 4) $12\sqrt{b}$; | 6) $-10\sqrt{0,7m}$; | 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$. |

504.° Упростите выражение:

- | | |
|--|---|
| 1) $4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 5\sqrt{a}$; | 3) $5\sqrt{c} + 3\sqrt{d} - \sqrt{c} + 3\sqrt{d}$; |
| 2) $6\sqrt{b} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{b}$; | 4) $\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$. |

505.° Упростите выражение:

- | | |
|---|--|
| 1) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$; | 3) $9\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$. |
| 2) $\sqrt{c} + 10\sqrt{c} - 14\sqrt{c}$; | |

506.° Упростите выражение:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{49a}$; | 3) $2\sqrt{0,04c} - 0,3\sqrt{16c} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$; |
| 2) $\sqrt{64b} - \frac{1}{6}\sqrt{36b}$; | 4) $0,4\sqrt{100m} + 15\sqrt{\frac{4}{9}m} - 1,2\sqrt{2,25m}$. |

507.° Упростите выражение:

- | | |
|---|---|
| 1) $2\sqrt{4x} + 6\sqrt{16x} - \sqrt{625x}$; | 2) $3\sqrt{0,09y} - 0,6\sqrt{144y} + \frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$. |
|---|---|

508.° Упростите выражение:

- | | |
|------------------------------|--|
| 1) $8\sqrt{2} - \sqrt{32}$; | 4) $2\sqrt{500} - 8\sqrt{5}$; |
| 2) $6\sqrt{3} - \sqrt{27}$; | 5) $5\sqrt{7} - \sqrt{700} - 0,5\sqrt{28}$; |
| 3) $\sqrt{96} - 3\sqrt{6}$; | 6) $2\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,6\sqrt{125}$. |

509.° Рациональным или иррациональным является значение выражения:

1) $\sqrt{48} - 6 - 4\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{162} - 9\sqrt{2} + \sqrt{27}$?

510.° Упростите выражение:

1) $4\sqrt{700} - 27\sqrt{7}$;

4) $5\sqrt{12} - 7\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{75} - 6\sqrt{3}$;

5) $3\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{98}$;

3) $2\sqrt{50} - 8\sqrt{2}$;

6) $\frac{1}{3}\sqrt{108} + \sqrt{363} - \frac{2}{9}\sqrt{243}$.

511.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} + \sqrt{8})$;

3) $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5}$;

2) $(\sqrt{3} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$;

4) $2\sqrt{2} \left(3\sqrt{18} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \sqrt{32} \right)$.

512.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{28})$;

3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{75} + 4) \cdot 3\sqrt{3}$;

2) $(\sqrt{18} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$;

4) $(\sqrt{600} + \sqrt{6} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$.

513.° Выполните умножение:

1) $(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$;

6) $(y - \sqrt{7})(y + \sqrt{7})$;

2) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$;

7) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$;

3) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$;

8) $(m + \sqrt{n})^2$;

4) $(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$;

9) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$;

5) $(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$;

10) $(2 - 3\sqrt{3})^2$.

514.° Выполните умножение:

1) $(\sqrt{7} + 3)(3\sqrt{7} - 1)$;

5) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)$;

2) $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$;

6) $(\sqrt{19} + \sqrt{17})(\sqrt{19} - \sqrt{17})$;

3) $(\sqrt{p} - q)(\sqrt{p} + q)$;

7) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$;

4) $(6 - \sqrt{13})(6 + \sqrt{13})$;

8) $(3 - 2\sqrt{15})^2$.

515.° Чему равно значение выражения:

1) $(2 + \sqrt{7})^2 - 4\sqrt{7}$;

2) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{2}$?

516.° Найдите значение выражения:

1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$;

2) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$.

517.° Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- 1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$.
 2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

518.° Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- 1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$; 5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

519.° Разложите на множители выражение:

- 1) $a^2 - 3$; 9) $b + 6\sqrt{b} + 9$;
 2) $4b^2 - 2$; 10) $3 + 2\sqrt{3c} + c$;
 3) $5 - 6c^2$; 11) $2 + \sqrt{2}$;
 4) $a - 9$, если $a \geq 0$; 12) $6\sqrt{7} - 7$;
 5) $m - n$, если $m \geq 0$, $n \geq 0$; 13) $a - \sqrt{a}$;
 6) $16x - 25y$, если $x \geq 0$, $y \geq 0$; 14) $\sqrt{b} + \sqrt{3b}$;
 7) $a - 2\sqrt{a} + 1$; 15) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$.
 8) $4m - 28\sqrt{mn} + 49n$,
 если $m \geq 0$, $n \geq 0$;

520.° Разложите на множители выражение:

- 1) $15 - x^2$; 6) $m + 2\sqrt{mn} + n$,
 если $m \geq 0$, $n \geq 0$;
 2) $49x^2 - 2$;
 3) $36p - 64q$,
 если $p \geq 0$, $q \geq 0$;
 4) $c - 100$, если $c \geq 0$;
 5) $a - 8b\sqrt{a} + 16b^2$;
 7) $a - 4\sqrt{a} + 4$;
 8) $5 + \sqrt{5}$;
 9) $\sqrt{3p} - p$;
 10) $\sqrt{12} + \sqrt{32}$.

521.° Сократите дробь:

- 1) $\frac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}$; 5) $\frac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}$; 9) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5 - \sqrt{10}}$;
 2) $\frac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}$; 6) $\frac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}$; 10) $\frac{13 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;
 3) $\frac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}$; 7) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$; 11) $\frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;
 4) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; 8) $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{10}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$; 12) $\frac{4b^2 - 4b\sqrt{c} + c}{2b - \sqrt{c}}$.

522.* Сократите дробь:

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; | 4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; | 7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$; |
| 2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$; | 5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; | 8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$. |
| 3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; | 6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$; | |

523.* Вынесите множитель из-под знака корня:

- 1) $\sqrt{3a^2}$, если $a \geq 0$; 2) $\sqrt{5b^2}$, если $b \leq 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$; 4) $\sqrt{c^5}$.

524.* Вынесите множитель из-под знака корня:

- 1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

525.* Упростите выражение:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$; | 4) $\sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} + 3\sqrt{80a}$; |
| 2) $3\sqrt{8} + \sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{162}$; | 5) $\sqrt{a^3b} - \frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, если $a > 0$; |
| 3) $0,7\sqrt{300} - 7\sqrt{\frac{3}{49} + \frac{2}{3}\sqrt{108}}$; | 6) $\sqrt{c^5} + 4c\sqrt{c^3} - 5c^2\sqrt{c}$. |

526.* Упростите выражение:

- | | |
|---|--|
| 1) $0,5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 0,4\sqrt{75}$; | 3) $\sqrt{81a^7} - 5a^3\sqrt{a} + \frac{6}{a}\sqrt{a^9}$. |
| 2) $2,5\sqrt{28b} + \frac{2}{3}\sqrt{63b} - 10\sqrt{0,07b}$; | |

527.* Докажите, что:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 2$; | 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}} = \sqrt{8} + \sqrt{6}$. |
|---|--|

528.* Упростите выражение:

- | | |
|--|--|
| 1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$; | 4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$; |
| 2) $(\sqrt{5}-2)^2 - (3+\sqrt{5})^2$; | 5) $(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2$. |
| 3) $\sqrt{\sqrt{17}-4} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+4}$; | |

529.* Найдите значение выражения:

- | | |
|--|--|
| 1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$; | 3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$; |
| 2) $(3-2\sqrt{7})^2 + (3+2\sqrt{7})^2$; | 4) $(\sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}})^2$. |

530.* Сократите дробь:

$$1) \frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5};$$

$$4) \frac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}};$$

$$2) \frac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21};$$

$$5) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}};$$

$$3) \frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}, \text{ если } a > 0, b > 0;$$

$$6) \frac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}.$$

531.* Сократите дробь:

$$1) \frac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}};$$

$$3) \frac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}.$$

$$2) \frac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}, \text{ если } a > 0, b > 0;$$

532.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1};$$

$$3) \frac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}};$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

$$2) \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{19}{2\sqrt{5}-1};$$

$$6) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

533.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$1) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2};$$

$$2) \frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}};$$

$$3) \frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

$$4) \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

534.* Докажите равенство:

$$1) \frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10;$$

$$3) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 4\sqrt{2}.$$

$$2) \frac{2}{3\sqrt{2}+4} - \frac{2}{3\sqrt{2}-4} = -8;$$

535.* Докажите, что значением выражения является рациональное число:

$$1) \frac{6}{3+2\sqrt{3}} + \frac{6}{3-2\sqrt{3}};$$

$$2) \frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}.$$

536.* Упростите выражение:

$$1) \frac{a}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2};$$

$$3) \frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}};$$

$$2) \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2} - \frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}};$$

$$4) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} - \frac{a}{a-16};$$

$$5) \frac{a}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}};$$

$$6) \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}+2};$$

$$7) \frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}} : \frac{c-25}{3c};$$

$$8) \left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1};$$

$$9) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$10) \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{12\sqrt{x}}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}.$$

537.* Упростите выражение:

$$1) \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}};$$

$$2) \frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b};$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}} : \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6};$$

$$4) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} : \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right);$$

$$5) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1};$$

$$6) \frac{a-64}{\sqrt{a}+3} \cdot \frac{1}{a+8\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}.$$

538.** Вынесите множитель из-под знака корня:

$$1) \sqrt{-m^9};$$

$$2) \sqrt{a^4 b^{13}}, \text{ если } a \neq 0;$$

$$3) \sqrt{4x^6 y}, \text{ если } x < 0;$$

$$4) \sqrt{m^7 n^7}, \text{ если } m \leq 0, n \leq 0;$$

$$5) \sqrt{45x^3 y^{14}}, \text{ если } y < 0;$$

$$6) \sqrt{64a^2 b^9}, \text{ если } a > 0;$$

$$7) \sqrt{242m^{11} b^{18}}, \text{ если } b < 0;$$

$$8) \sqrt{-m^2 n^2 p^{15}}, \text{ если } m > 0, n < 0.$$

539.** Вынесите множитель из-под знака корня:

$$1) \sqrt{-m^{19}};$$

$$2) \sqrt{a^{23} b^{24}}, \text{ если } b \neq 0;$$

$$3) \sqrt{49a^2 b}, \text{ если } a < 0;$$

$$4) \sqrt{a^9 b^9};$$

$$5) \sqrt{27x^{15} y^{34}}, \text{ если } y < 0;$$

$$6) \sqrt{-50m^6 n^6 p^7}, \text{ если } m > 0, n > 0.$$

540.** Внесите множитель под знак корня:

$$1) a\sqrt{3};$$

$$2) b\sqrt{-b};$$

$$3) c\sqrt{c^5};$$

$$4) t\sqrt{n}, \text{ если } t \geq 0;$$

$$5) xy^2\sqrt{xy}, \text{ если } x \leq 0;$$

$$6) 2p\sqrt{\frac{p}{2}};$$

$$7) 2p\sqrt{-\frac{p}{2}};$$

$$8) ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ если } a \geq 0;$$

541.* Внесите множитель под знак корня:

- 1) $m\sqrt{7}$, если $m \geq 0$;
- 2) $3n\sqrt{6}$, если $n \leq 0$;
- 3) $p\sqrt{p^3}$;
- 4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, если $y \leq 0$;
- 5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;
- 6) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, если $a \leq 0$, $b > 0$.

542.* Докажите тождество:

- 1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49} \right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7$;
- 2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27} \right) = \sqrt{a}$.

543.* Упростите выражение:

- 1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}$;
- 2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)$.

544.* Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;
- 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;
- 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

545.* Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$;
- 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$;
- 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

546.* Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

547.* Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

548.* Докажите, что

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2.$$

549.* Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$;
- 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

550. Рабочий должен был изготавливать ежедневно 12 деталей. Однако он изготавливал ежедневно 15 деталей, и уже за 5 дней до окончания срока работы ему осталось изготовить 30 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?
551. При распродаже цену на товар снизили на 20 %. На сколько процентов нужно повысить цену на товар, чтобы она стала равна первоначальной?
552. Лодка проплыла 32 км по течению реки за 4 ч, а то же самое расстояние против течения — за 8 ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
553. Федя и Оля ехали в одном поезде. Федя сел в двенадцатый вагон от головы поезда, а Оля — в шестой вагон от хвоста поезда. Оказалось, что они едут в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?
554. Число a — положительное, а число b — отрицательное. Какое из данных выражений принимает наибольшее значение:
1) a^2b ; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab ; 5) $-a^2b$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

555. Известно, что в некотором классе на «хорошо» и «отлично» учатся не менее 95,5 % и не более 96,5 % учащихся. Какое наименьшее количество учащихся может быть в этом классе?

17. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Если площадь квадрата равна x , то его сторону y можно найти по формуле $y = \sqrt{x}$. Изменение площади x квадрата приводит и к изменению его стороны y .

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y . Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = \sqrt{x}$ задает функцию.

Поскольку в выражении $\sqrt{x}$ допустимыми значениями переменной x являются все неотрицательные числа, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел.

Выражение $\sqrt{x}$ не может принимать отрицательные значения, то есть ни одно отрицательное число не может принадлежать области значений рассматриваемой функции. Покажем, что функция $y = \sqrt{x}$ может принимать любые неотрицательные значения, например 7,2. Действительно, существует такое значение аргумента x , что $\sqrt{x} = 7,2$. Это значение равно $7,2^2$. На этом примере мы видим, что для любого неотрицательного числа b всегда найдется такое значение x , что $\sqrt{x} = b$. Таким значением аргумента x является число b^2 .

Следовательно, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел.

Заметим, что если $x = 0$, то $y = 0$.

Учитывая область определения и область значений функции $y = \sqrt{x}$, можно сделать вывод, что ее график расположен только в первой координатной четверти.

В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим на координатной плоскости точки, координаты $(x; y)$ которых приведены в таблице (рис. 29).

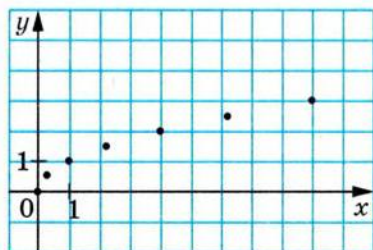


Рис. 29

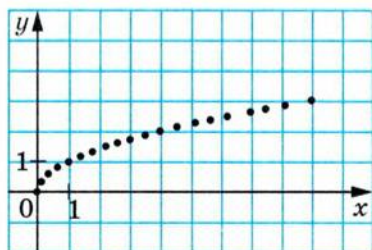


Рис. 30

Чем больше отметить точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \sqrt{x}$, тем меньше полученная фигура будет отличаться от графика функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 30).

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все такие точки, то получили бы фигуру, изображенную на рисунке 31. В старших классах будет доказано, что графиком функции $y = \sqrt{x}$ является фигура, равная ветви параболы $y = x^2$.

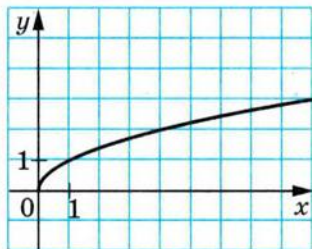


Рис. 31

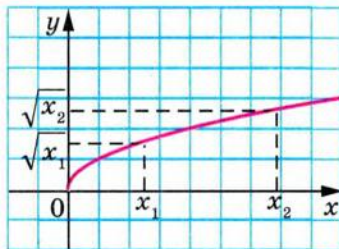


Рис. 32

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения аргумента функции $y = \sqrt{x}$ таких, что $x_1 < x_2$. Тогда из свойства арифметического квадратного корня следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это означает, что большему значению аргумента функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение функции. Верно и обратное утверждение: большему значению функции соответствует большее значение аргумента, то есть если $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 32).

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt{x}$, изученные в этом пункте.

Область определения	Множество неотрицательных чисел
Область значений	Множество неотрицательных чисел
График	Ветвь параболы
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$
Сравнение значений функции	Большему значению аргумента соответствует большее значение функции

ПРИМЕР 1 Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ (рис. 33). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой равна 4. Проверка подтверждает, что число 4 является корнем данного уравнения. ▲

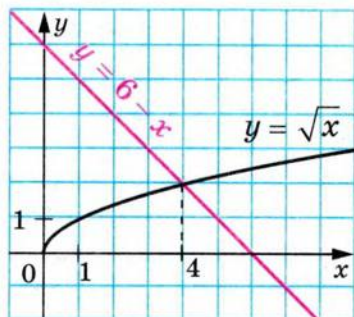


Рис. 33

ПРИМЕР 2 Сравните числа: 1) 6 и $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{65}$.

Решение. 1) Поскольку $6 = \sqrt{36}$ и $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, то есть $6 > \sqrt{31}$.

2) Имеем: $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, $63 < 65$, $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Следовательно, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$. ▲

ПРИМЕР 3 При каких значениях x выполняется неравенство $\sqrt{x} < 3$?

Решение. Запишем данное неравенство так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Поскольку большее значение функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большему значению аргумента, то можно сделать вывод, что $x < 9$. Учитывая, что выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при $x \geq 0$, получаем, что данное неравенство выполняется при всех x , удовлетворяющих неравенству $0 \leq x < 9$. ▲

ПРИМЕР 4 Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

Решение. Поскольку $\sqrt{5} > 2$ и $\sqrt{5} < 3$, то $\sqrt{5}-2 > 0$ и $\sqrt{5}-3 < 0$. Отсюда получаем:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| = \sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$$

Ответ: 1. ▲



1. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
2. Какова область значений функции $y = \sqrt{x}$?
3. Чему равен нуль функции $y = \sqrt{x}$?
4. В какой координатной четверти расположен график функции $y = \sqrt{x}$?

5. Какая фигура является графиком функции $y = \sqrt{x}$?
6. Неотрицательные числа a и b таковы, что $a > b$. Сравните $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$.
7. Известно, что $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Сравните числа a и b .

УПРАЖНЕНИЯ

556.° Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Заполните таблицу:

x	0,01	4				1600
y			9	11	1,5	

557.° Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$.

- 1) Чему равно значение функции, если значение аргумента равно: 0,16; 64; 1,44; 3600?
- 2) При каком значении аргумента значение функции равно: 0,2; 5; 120; -4?

558.° Не выполняя построения, определите, через какие из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:

$A(36; 6)$, $B(4; -2)$, $C(0,81; 0,9)$, $D(-1; 1)$, $E(42,25; 6,5)$.

559.° Через какую из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:

- 1) $A(16; 4)$; 2) $B(49; -7)$; 3) $C(3,6; 0,6)$; 4) $D(-36; 6)$?

560.° Сравните числа:

- 1) $\sqrt{86}$ и $\sqrt{78}$; 4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ и 1; 7) $\sqrt{41}$ и $2\sqrt{10}$;
- 2) $\sqrt{1,4}$ и $\sqrt{1,6}$; 5) -7 и $-\sqrt{48}$; 8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{1,1}$;
- 3) 5 и $\sqrt{26}$; 6) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; 9) $\sqrt{75}$ и $4\sqrt{3}$.

561.° Сравните числа:

- 1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ и 6; 5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;
- 2) 9 и $\sqrt{82}$; 4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

562.° Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:

- 1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

563.° Запишите в порядке убывания числа: 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

564.* Запишите в порядке возрастания числа: $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

565.* Между какими двумя последовательными целыми числами расположено на координатной прямой число:

- | | | |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| 1) $\sqrt{2}$; | 4) $\sqrt{7}$; | 7) $\sqrt{59}$; |
| 2) $\sqrt{3}$; | 5) $\sqrt{13}$; | 8) $-\sqrt{115}$; |
| 3) $\sqrt{5}$; | 6) $\sqrt{0,98}$; | 9) $-\sqrt{76,19}$? |

566.* Между какими двумя последовательными целыми числами расположено на координатной прямой число:

- 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $\sqrt{160}$; 5) $-\sqrt{86}$; 6) $-\sqrt{30,5}$?

567.* Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

- 1) 3 и $\sqrt{68}$; 2) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{77}$; 3) $-\sqrt{31}$ и $-2,3$; 4) $-\sqrt{42}$ и 2,8.

568.* Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

- 1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ и $-\sqrt{47}$.

569.* При каких значениях x выполняется неравенство:

- 1) $\sqrt{x} \geq 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leq \sqrt{x} < 9$?

570.* При каких значениях x выполняется неравенство:

- 1) $\sqrt{x} \leq 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leq \sqrt{x} \leq 20$?

571.* Решите графически уравнение:

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\sqrt{x} = x$; | 3) $\sqrt{x} = x + 2$; | 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$; |
| 2) $\sqrt{x} = x^2$; | 4) $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$; | 6) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$. |

572.* Решите графически уравнение:

- 1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

573.* Упростите выражение:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; | 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$; |
| 2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; | 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$. |

574.* Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

575.** Решите уравнение $\sqrt{x} = -x^2$.

576.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

1) Найдите: $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.

2) Постройте график данной функции.

577.* Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

1) Найдите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

2) Постройте график данной функции.

578.* Найдите область определения, область значений и нули функции $y = \sqrt{-x}$. Постройте график данной функции.

579.* Постройте график функции $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

580.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

581.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

582.* Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = a - x$ в зависимости от значения a ?

583.* Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}$.

584.* Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{(\sqrt{a}+6)^2 - 24\sqrt{a}}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

585. В первом контейнере было 90 кг яблок, а во втором — 75 кг. После того как из первого контейнера взяли в 3 раза больше яблок, чем из второго, в первом осталось в 2 раза меньше яблок, чем во втором. Сколько килограммов яблок взяли из первого контейнера?

586. От пристани против течения реки отплыла моторная лодка, собственная скорость которой равна 12 км/ч. Через 40 мин после отправления лодки вышел из строя мотор, и лодку течением реки через 2 ч принесло к пристани. Какова скорость течения реки?

587. Докажите тождество:

$$1) \left(\frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{1}{a^2-4b^2} : \frac{a+2b}{(2b-a)^2} \right) : \frac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2} = \frac{2b}{a^2};$$

$$2) \left(\frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9} \right) \cdot \frac{a^2-9}{a+1} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a.$$

588. Расстояние между двумя городами легковой автомобиль проезжает за 2 ч, а грузовой — за 3 ч. Через какое время после начала движения они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

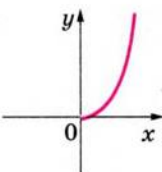
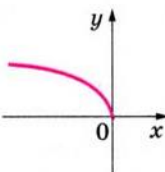
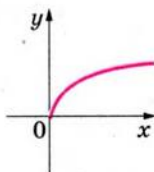
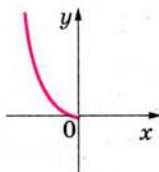
589. Решите уравнение:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 1) $x^2 = 0$; | 4) $-3x^2 + 12 = 0$; | 7) $\frac{1}{6}x^2 - 5x = 0$; |
| 2) $x^2 - 1 = 0$; | 5) $5x^2 - 6x = 0$; | 8) $x^2 - 2x + 1 = 0$; |
| 3) $x^2 + 5x = 0$; | 6) $0,2x^2 + 2 = 0$; | 9) $9x^2 + 30x + 25 = 0$. |

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

590. Натуральные числа от 1 до 37 записаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится нацело на следующее за ними число. Какое число записано на третьем месте, если на первом месте записано число 37, а на втором — 1?

ЗАДАНИЕ № 4 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

- Какое из данных утверждений неверно?
 А) -5 — целое число; В) -5 — иррациональное число;
 Б) -5 — рациональное число; Г) -5 — действительное число.
- Какое из чисел является иррациональным?
 А) $\sqrt{4}$; Б) $\sqrt{0,4}$; В) $\sqrt{0,04}$; Г) $\sqrt{400}$.
- Графиком какой из функций является парабола?
 А) $y = 2x$; Б) $y = x^2$; В) $y = \frac{2}{x}$; Г) $y = \frac{x}{2}$.
- На каком из рисунков изображен график функции $y = \sqrt{x}$?
 А)  Б)  В)  Г) 
- Какое из данных выражений не имеет смысла?
 А) $\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{2}$; В) $\sqrt{-2}$; Г) $\sqrt{(-2)^2}$.
- Вычислите значение выражения $\sqrt{7x-3}$ при $x = 4$.
 А) 5; Б) -5; В) 25; Г) -25.
- Чему равно значение выражения $\sqrt{36 \cdot 0,81}$?
 А) 6,9; Б) 54; В) 5,4; Г) 0,54.
- Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.
 А) 2; Б) 4; В) 2,5; Г) 0,4.
- Упростите выражение $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$.
 А) $15\sqrt{a}$; Б) $15a$; В) $7\sqrt{a}$; Г) $7a$.
- Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{12}{\sqrt{2}}$.
 А) $\sqrt{2}$; Б) $4\sqrt{2}$; В) $6\sqrt{2}$; Г) $10\sqrt{2}$.
- Сократите дробь $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.
 А) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; Б) $\frac{a+2}{a-2}$; В) 1; Г) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.
- Упростите выражение $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$.
 А) 15; Б) 5; В) $10-\sqrt{5}$; Г) $10+5\sqrt{5}$.

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 2

Свойства функции $y = x^2$

Область определения: $\mathbb{R}$.

Область значений: множество неотрицательных чисел.

График: парабола.

Нуль функции: $x = 0$.

Свойство графика: если точка $A(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции, то точка $B(-x_0; y_0)$ также принадлежит графику.

Квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a .

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a . *

Равные множества

Два множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A принадлежит множеству B и, наоборот, каждый элемент множества B принадлежит множеству A .

Подмножество

Множество B называют подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

Обозначения числовых множеств

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Связь между числовыми множествами

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Свойства арифметического квадратного корня

Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Для любого действительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$, выполняется равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geq 0$ и $b > 0$, выполняется равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

Область определения: множество неотрицательных чисел.

Область значений: множество неотрицательных чисел.

График: ветвь параболы.

Нуль функции: $x = 0$.

Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

§ 3

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Изучив материал этого параграфа, вы научитесь решать уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.
- Ознакомитесь с теоремой Виета для квадратного уравнения.
- Овладеете приемами решения уравнений, сводящихся к квадратным.

18. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений

Вы умеете решать линейные уравнения, то есть уравнения вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют **уравнением первой степени**.

Например, каждое из линейных уравнений $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ является уравнением первой степени. А вот линейные уравнения $0x = 0$, $0x = 2$ не являются уравнениями первой степени.

Числа a и b называют **коэффициентами уравнения первой степени** $ax = b$.

То, что множество уравнений первой степени является подмножеством множества линейных уравнений, иллюстрирует схема на рисунке 34.

Вы также умеете решать некоторые уравнения, содержащие переменную во второй степени. Например, готовясь к изучению



Рис. 34

новой темы, вы решили уравнения $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (упражнение 589). Каждое из этих уравнений имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Определение. **Квадратным уравнением** называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c называют коэффициентами квадратного уравнения. Число a называют первым или старшим коэффициентом, число b — вторым коэффициентом, число c — свободным членом.

Например, квадратное уравнение $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ имеет следующие коэффициенты: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют **приведенным**.

Например, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — это приведенные квадратные уравнения.

Поскольку в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ старший коэффициент не равен нулю, то неприведенное квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведенное, равносильное данному. Разделив обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на число a , получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением**.

Существует три вида неполных квадратных уравнений.

1. При $b = c = 0$ имеем: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ и $b \neq 0$ имеем: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ и $c \neq 0$ имеем: $ax^2 + c = 0$.

Решим неполные квадратные уравнения каждого вида.

1. Поскольку $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

2. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ представим в виде $x(ax + b) = 0$. Это уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , один из которых равен нулю, а другой является корнем уравнения первой степени $ax + b = 0$.

Отсюда $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Уравнение $ax^2 + c = 0$ представим в виде $x^2 = -\frac{c}{a}$. Поскольку

$c \neq 0$, то возможны два случая: $-\frac{c}{a} < 0$ или $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, что

в первом случае уравнение корней не имеет. Во втором случае уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Обобщим полученные результаты:

Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИМЕР Решите уравнение $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

Решение. При $x > 0$ имеем: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$. Отсюда $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ или $x = -2$. Но корень $x = -2$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

При $x < 0$ имеем: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$. Отсюда $x^2 + 4 = 0$. Последнее уравнение не имеет корней.

Ответ: 2. ▲



1. Какое уравнение называют линейным?
2. Какое уравнение называют уравнением первой степени?
3. Приведите пример линейного уравнения, являющегося уравнением первой степени, и пример линейного уравнения, которое не является уравнением первой степени.
4. Какое уравнение называют квадратным?

5. Как называют коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Какое квадратное уравнение называют приведенным?
7. Какое квадратное уравнение называют неполным?
8. Какие существуют виды неполных квадратных уравнений? Какие корни имеет уравнение каждого вида?

УПРАЖНЕНИЯ

591.° Укажите среди данных уравнений квадратные и назовите, чему равны старший коэффициент, второй коэффициент и свободный член каждого из них:

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $x = 0$; | 5) $x^2 - 4x + 2 = 0$; | 9) $6 - x^2 + 4x = 0$; |
| 2) $x^2 = 0$; | 6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$; | 10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$. |
| 3) $x^2 + x = 0$; | 7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$; | |
| 4) $x^2 + 1 = 0$; | 8) $x^3 - x - 9 = 0$; | |

592.° Составьте квадратное уравнение, в котором:

- 1) старший коэффициент равен 6, второй коэффициент равен 7, а свободный член равен 2;
- 2) старший коэффициент равен 1, второй коэффициент равен -8, а свободный член равен $-\frac{1}{3}$;
- 3) старший коэффициент равен -0,5, второй коэффициент равен 0, а свободный член равен $2\frac{3}{7}$;
- 4) старший коэффициент равен 7,2, второй коэффициент равен -2, а свободный член равен 0.

593.° Составьте квадратное уравнение, в котором:

- 1) старший коэффициент равен -1, второй коэффициент равен -2, а свободный член равен 1,6;
- 2) старший коэффициент и свободный член равны 2, а второй коэффициент равен 0.

594.° Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a , b и c :

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$; | 3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$; |
| 2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$; | 4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$. |

595.° Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a , b и c :

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $x(x + 10) = 8x + 3$; | 2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$. |
|---------------------------|-----------------------------|

596.° Укажите, какие из данных уравнений являются приведенными, и преобразуйте неприведенные уравнения в приведенные:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$; 5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;

2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$; 4) $16 - 6x + x^2 = 0$; 6) $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$.

597.° Преобразуйте данное квадратное уравнение в приведенное:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$; 3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

598.° Какие из чисел 1; 0; -3; 2; -10 являются корнями уравнения $x^2 + 9x - 10 = 0$?

599.° Докажите, что:

1) число -1 не является корнем уравнения $x^2 - 2x + 3 = 0$;

2) числа $-\frac{1}{3}$ и -3 являются корнями уравнения $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

3) числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ являются корнями уравнения $3x^2 - 6 = 0$.

600.° Докажите, что:

1) число -5 является корнем уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$;

2) число 4 не является корнем уравнения $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

601.° Решите уравнение:

1) $5x^2 - 45 = 0$; 3) $2x^2 - 10 = 0$; 5) $64x^2 - 9 = 0$;

2) $x^2 + 8x = 0$; 4) $2x^2 - 10x = 0$; 6) $x^2 + 16 = 0$.

602.° Решите уравнение:

1) $x^2 + 7x = 0$; 3) $3x^2 - 6 = 0$;

2) $2x^2 - 11x = 0$; 4) $-8x^2 = 0$.

603.° Решите уравнение:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;

2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;

3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

604.° Решите уравнение:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;

2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

605.° Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 36 больше меньшего из них.

606.° Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 80 больше большего из них.

607.° Докажите, что числа $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

608.* Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x;$

2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2.$

609.* Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0;$

2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1.$

610.* При каком значении m :

1) число 2 является корнем уравнения $x^2 + mx - 6 = 0$;

2) число -3 является корнем уравнения $2x^2 - 7x + m = 0$;

3) число $\frac{1}{7}$ является корнем уравнения $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

611.* При каком значении n :

1) число 6 является корнем уравнения $x^2 - nx + 3 = 0$;

2) число 0,5 является корнем уравнения $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

612.* Решите уравнение, разложив его левую часть на множители способом группировки:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 + 12x + 20 = 0$; 3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.

613.* Решите уравнение, выделив в его левой части квадрат двучлена:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 7 = 0$; 3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

614.* Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

3) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

615.* Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 17 больше, чем удвоенное число, большее из них. Найдите эти числа.

616.* Найдите два последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 1.

617.* При каком значении m не является квадратным уравнение:

1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;

2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;

3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

618.* Каким числом — положительным или отрицательным — является отличный от нуля корень неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$, если:

1) $a > 0, b > 0$;

3) $a > 0, b < 0$;

2) $a < 0, b > 0$;

4) $a < 0, b < 0$?

619.* Имеет ли корни неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:

- 1) $a > 0, c > 0$; 3) $a > 0, c < 0$;
2) $a < 0, c > 0$; 4) $a < 0, c < 0$?

620.** Каким многочленом можно заменить звездочку в уравнении $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, чтобы образовалось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

- 1) 0 и 4; 2) -1 и 1?

621.** Каким многочленом можно заменить звездочку в уравнении $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, чтобы образовалось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

- 1) 0; -7; 2) -4; 4?

622.** Решите уравнение:

- 1) $x^2 - 3|x| = 0$; 3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$;
2) $x^2 + |x| - 2x = 0$; 4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$.

623.** Решите уравнение:

- 1) $x^2 - 7|x| = 0$; 2) $x^2 - 6|x| + x = 0$; 3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0$.

624.** При каком значении a уравнение $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ является:

- 1) линейным;
2) приведенным квадратным;
3) неполным неприведенным квадратным;
4) неполным приведенным квадратным?

625.** Определите, при каком значении a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:

- 1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$;
2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;
3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

626. Выполните действия:

- 1) $\frac{3-2a}{2a} - \frac{1-a^2}{a^2}$; 3) $\frac{4}{c^2-4c} - \frac{c+4}{c^2-16}$; 5) $\frac{72a^3b}{c} : (27a^2b)$;
2) $\frac{a^2-6b^2}{3b} + 2b$; 4) $\frac{56a^5}{b^4} \cdot \frac{b^2}{14b^5}$; 6) $\frac{4a^2-1}{a^2-9} : \frac{10a+5}{a+3}$.

627. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{3} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{75}$;

3) $(5 - \sqrt{2})^2$;

2) $(3\sqrt{5} - \sqrt{20})\sqrt{5}$;

4) $(\sqrt{18} - \sqrt{3})\sqrt{2} + 0,5\sqrt{24}$.

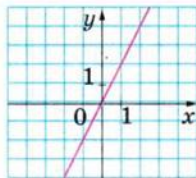
628. Какой из графиков, представленных на рисунке 35, является графиком функции:

1) $y = x^2$;

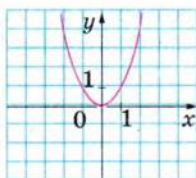
2) $y = 2x$;

3) $y = \frac{x}{2}$;

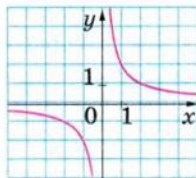
4) $y = \frac{2}{x}$?



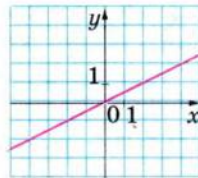
а



б



в



г

Рис. 35

629. Ученик задумал двузначное число. Если каждую цифру этого числа увеличить на 2, то полученное число будет на 13 меньше удвоенного задуманного числа. Какое число задумал ученик?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

630. Печатный автомат получает на входе карточку с числами $(a; b)$

и выдает на выходе карточку с числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)$. Можно

ли с помощью этого автомата из карточки с числами $(0,25; 1000)$ получить карточку с числами $(1,25; 250)$?

19. Формула корней квадратного уравнения

Зная коэффициенты a и b уравнения первой степени $ax = b$, можно найти его корень по формуле $x = \frac{b}{a}$.

Выведем формулу, позволяющую по коэффициентам a , b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находить его корни.

Имеем:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Поскольку $a \neq 0$, то, умножив обе части этого уравнения на $4a$, получим уравнение, равносильное данному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения квадрат двучлена:

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac &= 0; \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac. \end{aligned} \quad (2)$$

Существование корней уравнения (2) и их количество зависят от знака значения выражения $b^2 - 4ac$. Это значение называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D , то есть $D = b^2 - 4ac$. Термин «дискриминант» происходит от латинского слова *discriminare*, что означает «различать», «разделять».

Теперь уравнение (2) можно записать так:

$$(2ax + b)^2 = D. \quad (3)$$

Возможны три случая: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то уравнение (3), а следовательно, и уравнение (1) корней не имеет. Действительно, при любом значении x выражение $(2ax + b)^2$ принимает только неотрицательные значения.

Вывод: *если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.*

2. Если $D = 0$, то уравнение (3) принимает вид

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Отсюда $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

Вывод: *если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.*

3. Если $D > 0$, то уравнение (3) можно записать в виде

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2.$$

Отсюда $2ax + b = -\sqrt{D}$ или $2ax + b = \sqrt{D}$. Тогда $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ или

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Вывод: *если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2 :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Применяют также краткую форму записи:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Эту запись называют **формулой корней квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

Полученную формулу можно применять и в случае, когда $D = 0$.
Имеем:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При решении квадратных уравнений удобно руководствоваться следующим алгоритмом:

- найти дискриминант D квадратного уравнения;
- если $D < 0$, то в ответе записать, что корней нет;
- если $D \geq 0$, то воспользоваться формулой корней квадратного уравнения.

Если второй коэффициент квадратного уравнения представить в виде $2k$, то можно пользоваться другой формулой, которая во многих случаях облегчает вычисления.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Найдем его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Обозначим выражение $k^2 - ac$ через D_1 .

Если $D_1 \geq 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получаем:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

то есть

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

ПРИМЕР 1 Решите уравнение:

- 1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
- 2) $-0,5x^2 + 2x - 2 = 0$;
- 3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
- 4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
- 5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Решение. 1) Для данного уравнения $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.
Дискриминант уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

$$\text{Следовательно, } x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: -2 ; $2\frac{2}{3}$.

2) Имеем:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Заметим, что данное уравнение можно решить другим способом. Умножив обе части уравнения на -2 , получаем:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Отсюда

$$(x - 2)^2 = 0; x - 2 = 0; x = 2.$$

Ответ: 2.

$$3) D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37.$$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

Ответ можно записать одним из двух способов: $\frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$; $\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$ или $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

$$4) D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0.$$

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

5) Представим данное уравнение в виде $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ и применим формулу корней для уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5}; \quad x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$; 3. ▲

ПРИМЕР 2 Решите уравнение:

$$1) x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0;$$

$$3) 9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}.$$

$$2) x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0;$$

Решение. 1) Имеем: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

При $x \geq 0$ получаем уравнение $x^2 + 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -8 и 2 , однако корень -8 не удовлетворяет условию $x \geq 0$.

При $x < 0$ получаем уравнение $x^2 - 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -2 и 8 , однако корень 8 не удовлетворяет условию $x < 0$.

Ответ: -2 ; 2 .

2) Поскольку $(\sqrt{x})^2 = x$ при $x \geq 0$, то искомые корни должны удовлетворять двум условиям одновременно: $x^2 - 10x - 24 = 0$ и $x \geq 0$. В таком случае говорят, что данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 10x - 24$ имеет корни -2 и 12 , но корень -2 не удовлетворяет условию $x \geq 0$.

Ответ: 12.

3) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \text{ или } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{9}.$$

Ответ: $-\frac{1}{9}$. ▲

ПРИМЕР 3 При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$;

2)* $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

Решение. 1) Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

Ответ: $b = -12$ или $b = 12$.

2) При $b = -6$ получаем линейное уравнение $8x + 1 = 0$, имеющее один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, откуда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: $b = -2$, или $b = 10$, или $b = -6$. ▲



1. Значение какого выражения называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Как зависит количество корней квадратного уравнения от знака дискриминанта?
3. Запишите формулу корней квадратного уравнения.
4. Каким алгоритмом удобно пользоваться при решении квадратных уравнений?

Несколько поколений учителей математики приобретали педагогический опыт, а их учащиеся углубляли свои знания, пользуясь чудесной книгой «Квадратные уравнения»

блестящего украинского педагога и математика

Николая Андреевича Чайковского.

Н. А. Чайковский оставил значительное

научное и педагогическое наследие.

Его труды известны далеко за пределами Украины.



Н. А. Чайковский
(1887–1970)



УПРАЖНЕНИЯ

631.° Найдите дискриминант и определите количество корней уравнения:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;

3) $2x^2 - 6x - 3,5 = 0$;

2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;

4) $5x^2 - 2x + 0,2 = 0$.

632.° Какое из данных уравнений имеет два корня:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;

3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;

4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

633.° Какое из данных уравнений не имеет корней:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;

3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;

2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;

4) $0,04x^2 - 0,4x + 1 = 0$?

634.° Решите уравнение:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

5) $x^2 + x - 56 = 0$;

3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 7) $x^2 - 8x + 12 = 0$; | 14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$; |
| 8) $x^2 + 7x + 6 = 0$; | 15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$; |
| 9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$; | 16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; |
| 10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; | 17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$; |
| 11) $2x^2 - x - 6 = 0$; | 18) $x^2 - 4x + 1 = 0$; |
| 12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$; | 19) $2x^2 - x - 4 = 0$; |
| 13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$; | 20) $x^2 - 8x + 20 = 0$. |

635.° Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; | 7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$; |
| 2) $x^2 + 12x - 13 = 0$; | 8) $-2x^2 + x + 15 = 0$; |
| 3) $x^2 - 7x + 10 = 0$; | 9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$; |
| 4) $x^2 - x - 72 = 0$; | 10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$; |
| 5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; | 11) $x^2 - 6x + 11 = 0$; |
| 6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$; | 12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$. |

636.° При каких значениях переменной равны значения:

- 1) многочленов $6x^2 - 2$ и $5 - x$;
- 2) двучлена $y - 6$ и трехчлена $y^2 - 9y + 3$;
- 3) трехчленов $4m^2 + 4m + 2$ и $2m^2 + 10m + 8$?

637.° При каких значениях переменной равны значения:

- 1) двучлена $4x + 4$ и трехчлена $3x^2 + 5x - 10$;
- 2) трехчленов $10p^2 + 10p + 8$ и $3p^2 - 10p + 11$?

638.° Найдите корни уравнения:

- 1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
- 2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
- 3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
- 4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
- 5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
- 6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

639.° Решите уравнение:

- 1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
- 2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
- 3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

640.° Найдите натуральное число, квадрат которого на 42 больше данного числа.

641.° Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 70 см^2 , а одна из сторон на 9 см больше другой.

642.° Произведение двух чисел равно 84. Найдите эти числа, если одно из них на 8 меньше другого.

643.° Произведение двух последовательных натуральных чисел на 89 больше их суммы. Найдите эти числа.

644.° Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 365. Найдите эти числа.

645.° Решите уравнение:

1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;

3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;

2) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$;

4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$.

646.° Решите уравнение:

1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;

3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$.

2) $x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0$;

647.° При каком значении a число $\frac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

648.° При каком значении a число 2 является корнем уравнения $x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0$?

649.° От квадратного листа картона отрезали полоску в форме прямоугольника шириной 3 см и длиной, равной стороне квадрата. Площадь оставшейся части листа составляет 40 см². Какой была длина стороны квадратного листа картона?

650.° От прямоугольного листа бумаги длиной 18 см отрезали квадрат, сторона которого равна ширине листа. Площадь оставшейся части листа составляет 72 см². Какой была ширина листа бумаги?

651.° Найдите катеты прямоугольного треугольника, если один из них на 14 см меньше другого, а гипотенуза равна 34 см.

652.° Найдите стороны прямоугольника, если их разность равна 31 см, а диагональ прямоугольника равна 41 см.

653.° Найдите три последовательных нечетных натуральных числа, если квадрат первого из них на 33 больше, чем удвоенная сумма второго и третьего.

654.° Найдите четыре последовательных четных натуральных числа, если сумма первого и третьего чисел в 5 раз меньше, чем произведение второго и четвертого чисел.

655.° Докажите, что если старший коэффициент и свободный член квадратного уравнения имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня.

656.* (Старинная индийская задача.)

На две партии разбившись,
 Забавлялись обезьяны.
 Часть восьмая их в квадрате
 На полянке кувыркались.
 А двенадцать по лианам
 Стали прыгать, повисая.
 Сколько было обезьянок,
 Ты скажи мне, в этой стае?

657.** В футбольном турнире было сыграно 36 матчей. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд?

658.** Сколько сторон у многоугольника, если в нем можно провести 90 диагоналей?

659.** Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2 + 7x - 4| = 4; & 4) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0; \\ 2) 5x^2 - 8|x| + 3 = 0; & 5) x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0; \\ 3) x|x| + 6x - 5 = 0; & 6) x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0. \end{array}$$

660.** Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2 + 10x - 4| = 20; & 3) \frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0; \\ 2) x|x| + 12x - 45 = 0; & 4) x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0. \end{array}$$

661.** Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80; & 2) x^2 + 8(\sqrt{x})^2 - 33 = 0. \end{array}$$

662.** Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) 6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}; & 2) 5x^2 - 14(\sqrt{x})^2 - 3 = 0. \end{array}$$

663.** При каких значениях b имеет единственный корень уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) 2x^2 + 4x - b = 0; & 2) 3x^2 - bx + 12 = 0? \end{array}$$

664.** При каких значениях b имеет единственный корень уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) 6x^2 - 18x + b = 0; & 2) 8x^2 + bx + 2 = 0? \end{array}$$

665.** Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

$$\begin{array}{ll} 1) 4x^2 - px - 3 = 0; & 2) x^2 + px + p - 2 = 0. \end{array}$$

666.* Докажите, что при любом значении m не имеет корней уравнение:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

667.* Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2 + bx - 7 = 0$

имеет два корня.

668.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

669.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$;
2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;
3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.

670.* При каких значениях b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?

671.* При каких значениях b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 + x + b = 0$; 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

672. Упростите выражение

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b} \right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

673. Найдите значение выражения $\frac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$.

674. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ и 4.

675. Имеется лом сплавов двух сортов, которые содержат 5% и 45% никеля соответственно. Сколько тонн лома каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить 120 т сплава, содержащего 30% никеля?

676. В книге недостает нескольких листов. На левой странице разворота стоит номер страницы 24, а на правой — номер 53. Сколько листов отсутствует между этими страницами?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

677. Решите уравнение, найдите сумму и произведение его корней и сравните их со вторым коэффициентом и свободным членом уравнения:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$;

2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

678. Заполните таблицу, где a , b и c — коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а x_1 и x_2 — его корни.

Уравнение	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 x_2$
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

679. Докажите, что из 101 кубика, которые окрашены в произвольные цвета, можно выбрать или 11 кубиков одного цвета, или 11 кубиков разных цветов.

20. Теорема Виета

Готовясь к изучению этого пункта, вы выполнили упражнения 677, 678. Возможно, эти упражнения подсказали вам, каким образом сумма и произведение корней квадратного уравнения связаны с его коэффициентами.

Теорема 20.1 (теорема Виета). Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доказательство. Условием теоремы предусмотрено, что данное квадратное уравнение имеет корни. Поэтому его дискриминант D не может быть отрицательным.

Пусть $D > 0$. Применив формулу корней квадратного уравнения, запишем:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

$$\text{Имеем: } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Пусть $D = 0$. В этом случае считают, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Имеем:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad \blacktriangle$$

Следствие. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$

$$x_1 x_2 = c.$$

Иными словами, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Теорема 20.2 (обратная теореме Виета). Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Доказательство. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Преобразуем его в приведенное:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$



Франсуа Виет
(1540–1603)

Французский математик, по профессии юрист. В 1591 г. ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для коэффициентов уравнений, благодаря чему стало возможным выражать свойства уравнений и их корни общими формулами. Среди своих открытий сам Виет особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.

Согласно условию теоремы это уравнение можно записать так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \quad (*)$$

Подставим в левую часть этого уравнения вместо x сначала число α , а затем число β . Получим:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким образом, числа α и β являются корнями уравнения (*), а следовательно, и корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Следствие. Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Это следствие позволяет решать некоторые квадратные уравнения устно, не используя формулу корней квадратного уравнения.

ПРИМЕР 1 Найдите сумму и произведение корней уравнения $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Решение. Выясним, имеет ли данное уравнение корни.

Имеем: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня x_1 и x_2 .

Тогда по теореме Виета $x_2 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$. ▲

ПРИМЕР 2 Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа -7 и 4 .

Решение. По теореме Виета $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$. ▲

ПРИМЕР 3 Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны: 1) 4 и $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Решение. 1) Пусть $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{5}{7}$.

Тогда $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$, $x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Умножив обе части этого уравнения на 7 , получаем квадратное уравнение с целыми коэффициентами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Пусть $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

$$\text{Тогда } x_1 + x_2 = \frac{6 - \sqrt{7}}{2} + \frac{6 + \sqrt{7}}{2} = 6, \quad x_1 x_2 = \frac{6 - \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6 + \sqrt{7}}{2} = \frac{36 - 7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Отсюда искомым является уравнение $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ▲

ПРИМЕР 4 Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

$$\text{Тогда имеем: } \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$. ▲

ПРИМЕР 5 Число 4 является корнем уравнения $3x^2 - 10x + n = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение n .

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, причем $x_1 = 4$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тогда $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$. Имеем: $\frac{n}{3} = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}$; $n = -8$.

Ответ: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ▲

ПРИМЕР 6 Составьте квадратное уравнение, корни которого на 4 больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, x'_1 и x'_2 — корни искомого уравнения.

По условию $x'_1 = x_1 + 4$, $x'_2 = x_2 + 4$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 x_2 = -14$.

Тогда имеем:

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x'_1 x'_2 = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, искомым является уравнение $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Ответ: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ▲



1. Сформулируйте теорему Виета.
2. Сформулируйте следствие из теоремы Виета.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.
4. Сформулируйте следствие из теоремы, обратной теореме Виета.

УПРАЖНЕНИЯ

680.° Чему равна сумма корней уравнения $x^2 + 5x - 10 = 0$:

- 1) 5; 2) -5; 3) -10; 4) 10?

681.° Чему равно произведение корней уравнения $x^2 - 14x + 12 = 0$:

- 1) -14; 2) 14; 3) 12; 4) -12?

682.° Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

- 1) $x^2 + 6x - 32 = 0$; 3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$; 4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

683.° Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:

- 1) $x^2 - 12x - 18 = 0$; 3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$; 4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

684.° Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, определите, являются ли корнями уравнения:

- 1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 и 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 и 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 и 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 и 11.

685.° Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, определите, являются ли корнями уравнения:

- 1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 и -2;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа -2 и -3.

686.° Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:

- 1) -8 и 6; 2) 4 и 5.

687.° Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:

- 1) -2 и 0,5; 2) -10 и -20.

688.° Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

- 1) 2 и 5; 3) -0,2 и -10; 5) 0 и 6;
2) $-\frac{1}{3}$ и 2; 4) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$.

689.° Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

- 1) -7 и -8 ; 2) 5 и $-0,4$; 3) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 4) $5-\sqrt{10}$ и $5+\sqrt{10}$.

690.° Число -2 является корнем уравнения $x^2 - 8x + q = 0$. Найдите значение q и второй корень уравнения.

691.° Число 7 является корнем уравнения $x^2 + px - 42 = 0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.

692.° Число $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $6x^2 - bx + 4 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

693.° Число $-0,2$ является корнем уравнения $4x^2 - 5,6x + m = 0$. Найдите значение m и второй корень уравнения.

694.° Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

695.° Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

696.° При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 17 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

697.° Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; | 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$; |
| 2) $x^2 + 5x + 4 = 0$; | 6) $x^2 - x - 2 = 0$; |
| 3) $x^2 - 4x - 5 = 0$; | 7) $x^2 + 2x - 8 = 0$; |
| 4) $x^2 + 4x - 5 = 0$; | 8) $x^2 - 3x - 18 = 0$. |

698.° Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 24 = 0$; | 3) $x^2 - 2x - 8 = 0$; |
| 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$; | 4) $x^2 + x - 12 = 0$. |

699.° Какие из данных уравнений имеют два положительных корня, какие — два отрицательных, а какие — корни разных знаков:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 - 12x + 14 = 0$; | 4) $x^2 + 16x + 10 = 0$; |
| 2) $x^2 + 6x - 42 = 0$; | 5) $x^2 - 24x + 0,1 = 0$; |
| 3) $x^2 - 7x - 30 = 0$; | 6) $x^2 + 20x + 3 = 0$? |

700.° Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.

701.° Корни уравнения $x^2 + 20x + a = 0$ относятся как $7 : 3$. Найдите значение a и корни уравнения.

702.° Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 5x_2 = 28$. Найдите корни уравнения и значение m .

703.* Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 4x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = 8$. Найдите корни уравнения и значение n .

704.* Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, найдите корни уравнения:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;

2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;

4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

705.* Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, найдите корни уравнения:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$;

2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

706.* Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

2) $x_1^2 + x_2^2$;

3) $(x_1 - x_2)^2$;

4) $x_1^3 + x_2^3$.

707.* Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$;

2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$;

3) $|x_2 - x_1|$.

708.* Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 меньше соответствующих корней уравнения $x^2 + 8x - 3 = 0$.

709.* Составьте квадратное уравнение, корни которого на 3 больше соответствующих корней уравнения $x^2 - 12x + 4 = 0$.

710.* Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

711.* Составьте квадратное уравнение, корни которого в 2 раза больше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

712.* Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a .

713.* Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Найдите значение a .

714.* Верно ли утверждение:

1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет корни разных знаков при любом значении a ;

2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения a они оба отрицательны?

715.* Найдите все целые значения b , при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$;

2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

716.* Найдите все целые значения b , при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$;

2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

717.* Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c . Найдите b и c .

718.* При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна: 1) 12; 2) 6?

719.* При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

720. Сократите дробь:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16}$;

3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25}$;

5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b}$;

4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4}$;

6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

721. В саду посадили рядами 48 деревьев с одинаковым количеством деревьев в каждом ряду. Рядов оказалось на 8 меньше, чем деревьев в каждом из них. Сколько деревьев посадили в каждом ряду и сколько было рядов?

722. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$. Начертите графики данных функций и отметьте найденные точки.

723. В саду 60 % деревьев составляют вишни и сливы, из них 30 % — сливы. Какой процент всех деревьев сада составляют сливы?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМ

724. Пользуясь методом группировки, разложите на множители многочлен:

1) $x^2 - 7x + 10$;

3) $a^2 + 8a + 12$;

2) $y^2 + 3y - 4$;

4) $x^2 - x - 6$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

725. Вася задумал три цифры: x , y , z . Петя называет три числа: a , b , c . Вася сообщает Пете значение выражения $ax + by + cz$. Какие числа должен назвать Петя, чтобы по полученной от Васи информации определить цифры, которые тот задумал?

ЗАДАНИЕ № 5 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Какое из данных уравнений не является квадратным?
А) $x^2 = 0$; Б) $x^2 + x = 0$; В) $x^3 + x = 0$; Г) $x^2 + x - 2 = 0$.
2. Решите уравнение $9x - x^2 = 0$.
А) -3; 0; 3; Б) 0; 3; В) -3; 3; Г) 0; 9.
3. Решите уравнение $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{2}$.
А) 0; 5; Б) 5; В) $\sqrt{5}$; Г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.
4. Какое из данных уравнений не имеет корней?
А) $x^2 - 5x - 2 = 0$; В) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0$; Г) $x^2 + 2x - 5 = 0$.
5. Сколько корней имеет уравнение $6x^2 + 13x + 5 = 0$?
А) Два; В) ни одного;
Б) бесконечно много; Г) один.
6. Найдите корни уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$.
А) 7; -3; Б) -7; 3; В) -7; -3; Г) 3; 7.
7. Чему равна сумма корней уравнения $x^2 - 10x - 12 = 0$?
А) 10; Б) -10; В) -12; Г) 12.
8. Чему равно произведение корней уравнения $3x^2 - 16x + 6 = 0$?
А) 6; Б) 2; В) -16; Г) $\frac{16}{3}$.
9. При каких значениях переменной принимают равные значения выражения $(3x - 1)(x + 2)$ и $(x - 12)(x - 4)$?
А) -12,5; 2; Б) 12,5; -2; В) -25; 4; Г) 25; -4.
10. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.
А) $x^2 + 6x - 7 = 0$; В) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0$; Г) $x^2 - 6x + 7 = 0$.
11. Решите уравнение $x|x| - 9x - 10 = 0$.
А) -1; 10; $\frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$; В) -1; $\frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$;
Б) 10; $\frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$; Г) -1; 10.
12. Число -5 является корнем уравнения $2x^2 + 9x + c = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение c .
А) $x_2 = 0,5$, $c = -5$; В) $x_2 = 9,5$, $c = 22,5$;
Б) $x_2 = -0,5$, $c = 5$; Г) $x_2 = 9,5$, $c = -22,5$.

21. Квадратный трехчлен

Определение. Квадратным трехчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Приведем примеры многочленов, являющихся квадратными трехчленами:

$$2x^2 - 3x + 5; \quad x^2 + 7x; \quad x^2 - 5; \quad 3x^2.$$

Заметим, что левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является квадратным трехчленом.

Определение. Корнем квадратного трехчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю.

Например, число 2 является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Значение выражения $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен корней не имеет. Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень, если $D > 0$ — то два корня.

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$. Разложим его на множители методом группировки (подобное упражнение, 724, вы выполняли при подготовке к изучению этого пункта).

Имеем:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$$

О таком тождественном преобразовании говорят, что квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$ разложили на линейные множители $x - 1$ и $x - 2$.

Связь между корнями квадратного трехчлена и линейными множителями, на которые он раскладывается, устанавливает следующая теорема.

Теорема 21.1. Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трехчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Доказательство. Поскольку числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Замечание. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то считают, что квадратный трехчлен имеет два равных корня, то есть $x_1 = x_2$. В этом случае разложение квадратного трехчлена на линейные множители имеет следующий вид:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Теорема 21.2. Если дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то данный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Доказательство. Предположим, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на линейные множители. Тогда существуют такие числа k , m и n , при которых выполняется равенство $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$. Отсюда получаем, что m и n — корни данного квадратного трехчлена. Следовательно, его дискриминант неотрицательный, что противоречит условию. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 1 Разложите на множители квадратный трехчлен:

$$1) x^2 - 14x - 32; \quad 2) -x^2 + 17x - 30; \quad 3) 3x^2 - 7x + 2.$$

Решение. 1) Найдем корни данного трехчлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 16.$$

Следовательно, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Решим уравнение $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Имеем:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 15.$$

Следовательно, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Тогда $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. $\blacktriangle$

ПРИМЕР 2 Сократите дробь $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен, являющийся числителем данной дроби. Решив уравнение $6a^2 - a - 1 = 0$, получаем:

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Теперь можно записать:

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a + 1)(2a - 1).$$

Тогда получаем:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Ответ: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$. ▲

ПРИМЕР 3 При каком значении m разложение на множители трехчлена $2x^2 + 9x + m$ содержит множитель $(x + 5)$?

Решение. Поскольку разложение данного трехчлена на множители должно содержать множитель $(x + 5)$, то один из корней этого трехчлена равен -5 .

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m &= 0; \\ m &= -5. \end{aligned}$$

Ответ: $m = -5$. ▲



1. Какой многочлен называют квадратным трехчленом?
2. Что называют корнем квадратного трехчлена?
3. Что называют дискриминантом квадратного трехчлена?
4. В каком случае квадратный трехчлен не имеет корней? имеет один корень? имеет два корня?
5. В каком случае квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители?
6. По какой формуле квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители?
7. В каком случае квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители?

УПРАЖНЕНИЯ

726.° Найдите корни квадратного трехчлена:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;

2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$.

727.° Можно ли разложить на линейные множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 12x + 6$;

3) $2a^2 - 8a + 8$;

2) $3x^2 - 8x + 6$;

4) $-6b^2 + b + 12$?

728.° Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 7x + 12$; 5) $-x^2 + x + 2$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;

2) $x^2 + 8x + 15$; 6) $6x^2 - 5x - 1$; 10) $-2x^2 - 0,5x + 1,5$;

3) $x^2 - 3x - 10$; 7) $4x^2 + 3x - 22$; 11) $0,4x^2 - 2x + 2,5$;

4) $-x^2 - 5x - 6$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$; 12) $-1,2m^2 + 2,6m - 1$.

729.° Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;

2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0,3m^2 - 3m + 7,5$;

3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$; 9) $x^2 - 2x - 2$.

730.° Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$; 5) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;

2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$; 4) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6x - 6}$; 6) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$.

731.° Сократите дробь:

1) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$; 2) $\frac{2x + 12}{x^2 + 3x - 18}$; 3) $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 + 7x}$.

732.° Сократите дробь:

1) $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 - 9a - 18}$; 3) $\frac{c^2 - 5c - 6}{c^2 - 8c + 12}$; 5) $\frac{x^2 - 16}{32 - 4x - x^2}$;

2) $\frac{2b^2 - 7b + 3}{4b^2 - 4b + 1}$; 4) $\frac{m^3 - 1}{m^2 + 9m - 10}$; 6) $\frac{4n^2 - 9n + 2}{2 + 9n - 5n^2}$.

733.° Сократите дробь:

1) $\frac{4x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$; 3) $\frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - a - 20}$;

2) $\frac{2y^2 + 3y - 5}{y^2 - 2y + 1}$; 4) $\frac{3 + 20b - 7b^2}{7b^2 - 6b - 1}$.

734.** При каком значении b разложение на линейные множители трехчлена:

- 1) $2x^2 - 5x + b$ содержит множитель $(x - 3)$;
- 2) $-4x^2 + bx + 2$ содержит множитель $(x + 1)$;
- 3) $3x^2 - 4x + b$ содержит множитель $(3x - 2)$?

735.** При каком значении a разложение на линейные множители трехчлена:

- 1) $2x^2 - 7x + a$ содержит множитель $(x - 4)$;
- 2) $4x^2 - ax + 6$ содержит множитель $(2x + 1)$?

736.** Упростите выражение:

- 1) $\frac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{a - 2}{3a + 2} + \frac{a - 1}{1 - 2a}$;
- 2) $\frac{b - 4}{b^3 - b} : \left(\frac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \frac{1}{b^2 - 1} \right)$;
- 3) $\left(\frac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \frac{2c}{c^2 - 6c + 9} \right) : \frac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2}$;
- 4) $\left(\frac{3}{m - 4} + \frac{2m}{m + 1} + \frac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4} \right) \cdot \frac{4m - 16}{2m - 3}$.

737.** Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения не зависит от значения переменной:

- 1) $\frac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \frac{5a + 6}{5a - 2} + \frac{9a - 8}{1 - 2a}$;
- 2) $\left(\frac{2a}{a + 3} + \frac{1}{a - 1} - \frac{4}{a^2 + 2a - 3} \right) : \frac{2a + 1}{a + 3}$.

738.** Постройте график функции:

- 1) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$;
- 2) $y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

739.** Постройте график функции:

- 1) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;
- 2) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

740.* Разложите на множители многочлен:

- 1) $x^2 - 6xy + 5y^2$;
- 2) $a^2 + 5ab - 36b^2$;
- 3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;
- 4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

741.* Разложите на множители многочлен:

- 1) $a^2 - 14ab + 40b^2$;
- 2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

742.* Для каждого значения a решите уравнение:

- 1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;
- 2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

743.* Для каждого значения a решите уравнение

$$(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

744. Сократите дробь:

1) $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};$

3) $\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3};$

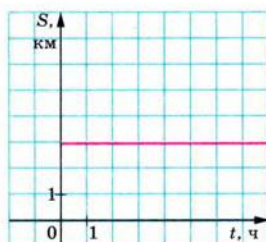
5) $\frac{9a-b^2}{9a+6b\sqrt{a+b^2}};$

2) $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-5\sqrt{2}};$

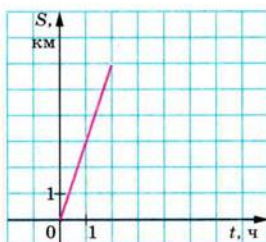
4) $\frac{4a-2}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}};$

6) $\frac{a\sqrt{a}-8}{a+2\sqrt{a+4}}.$

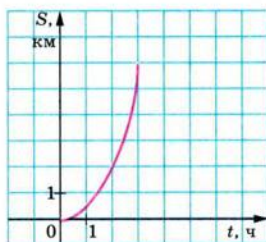
745. Какой из графиков, представленных на рисунке 36, является графиком движения пешехода, шедшего с постоянной скоростью? Определите скорость движения этого пешехода.



а



б



в

Рис. 36

746. Смешали 2 л молока жирностью 8 % и 3 л молока жирностью 6 %. Какова жирность полученной смеси?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

747. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9;$

3) $(4x + 1)^2 = 9;$

5) $\sqrt{x} = 9;$

2) $x^2 = -9;$

4) $(x - 1)^2 = 5;$

6) $\sqrt{x} = -9.$

748. Решите уравнение:

1) $\frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2};$

3) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1;$

2) $\frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1;$

4) $\frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}.$

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

- 749. Рассматривают все прямоугольники, длины сторон которых — натуральные числа. Каких прямоугольников больше: с периметром 1000 или с периметром 1002?

22. Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = t$. Тогда $x^4 = t^2$. Подставив в исходное уравнение вместо x^2 и x^4 соответственно t и t^2 , получим квадратное уравнение с переменной t :

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Поскольку $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4 \text{ и } x^2 = 9.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ можно записать двумя способами: -2 ; 2 ; -3 ; 3 или ± 2 ; ± 3 . ▲

Определение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют **биквадратным уравнением**.

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют **методом замены переменной**.

Метод замены переменной можно использовать не только при решении биквадратных уравнений.

ПРИМЕР 2 Решите уравнение $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Решение. Выполним замену $(2x - 1)^2 = t$. Тогда исходное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Теперь надо решить следующие два уравнения:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ и } (2x - 1)^2 = 1.$$

Первое из них корней не имеет. Из второго уравнения получаем:

$$2x - 1 = -1 \text{ или } 2x - 1 = 1.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: 0; 1. ▲

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$. Получаем: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Отсюда $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Получаем два уравнения:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \quad \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\sqrt{x} \geq 0$, то эти уравнения корней не имеют, а следовательно, и исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет. ▲

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$

Отсюда

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \\ x = -3 \text{ или } x = 6, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$x = -3.$$

Ответ: -3. ▲

ПРИМЕР 5 Решите уравнение $\frac{5}{x^2 - 4x + 4} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}$.

Решение. Имеем: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0$;

$$\frac{5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5(x+2) - 4(x-2) - (x-2)^2 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 5x + 10 - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \\ x = 7 \text{ или } x = -2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \\ x = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7. ▲



Какое уравнение называют биквадратным?

УПРАЖНЕНИЯ

750.° Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;

3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;

5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;

6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

751.° Решите уравнение:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;

2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;

3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;

4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;

5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

752.° Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;

2) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0$;

3) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;

4) $\frac{x^2 - 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10}$;

5) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;

6) $\frac{x^2 + 10x}{x - 8} = \frac{12x + 48}{x - 8}$;

7) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;

8) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;

9) $\frac{x^2 - 6x}{x - 4} = 4$;

10) $\frac{5x + 18}{x - 2} = x$;

11) $x + 1 = \frac{6}{x}$;

12) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

753.° Решите уравнение:

$$1) \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0;$$

$$5) \frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0;$$

$$2) \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0;$$

$$6) \frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6;$$

$$3) \frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8};$$

$$7) \frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y;$$

$$4) \frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7};$$

$$8) y - \frac{39}{y} = 10.$$

754.* Решите уравнение:

$$1) (x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0;$$

$$2) (2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0;$$

$$3) (6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0;$$

$$4) (x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0.$$

755.* Решите уравнение:

$$1) (3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0;$$

$$2) (2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0.$$

756.* Решите уравнение:

$$1) x - 3\sqrt{x} + 2 = 0;$$

$$4) 8\sqrt{x} + x + 7 = 0;$$

$$2) x - \sqrt{x} - 12 = 0;$$

$$5) 6\sqrt{x} - 27 + x = 0;$$

$$3) 3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0;$$

$$6) 8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0.$$

757.* Решите уравнение:

$$1) x - 6\sqrt{x} + 8 = 0;$$

$$3) 2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0.$$

$$2) x - 5\sqrt{x} - 50 = 0;$$

758.* Решите уравнение:

$$1) \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0;$$

$$2) \frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0;$$

$$4) \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0.$$

759.* Решите уравнение:

$$1) \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0;$$

$$2) \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0.$$

760.* Решите уравнение:

$$1) \frac{2y}{y - 3} = \frac{3y + 3}{y};$$

$$3) \frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7};$$

$$2) \frac{3x + 4}{x - 3} = \frac{2x - 9}{x + 1};$$

$$4) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 3x - 4.$$

761.* Найдите корни уравнения:

$$1) \frac{2x-13}{x-6} = \frac{x+6}{x};$$

$$2) \frac{3x^2-4x-20}{x+2} = 2x-5.$$

762.* Найдите корни уравнения:

$$1) \frac{10}{x+2} + \frac{9}{x} = 1;$$

$$6) \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2-5x} = \frac{3-x}{x-5};$$

$$2) \frac{48}{14-x} - \frac{48}{14+x} = 1;$$

$$7) \frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{1}{x};$$

$$3) \frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4};$$

$$8) \frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2-6x} + \frac{x-12}{x^2+6x} = 0;$$

$$4) \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9};$$

$$9) \frac{x}{x+7} + \frac{x+7}{x-7} = \frac{63-5x}{x^2-49};$$

$$5) \frac{4x-10}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 4;$$

$$10) \frac{4}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2-25}.$$

763.* Решите уравнение:

$$1) \frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{5};$$

$$4) \frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0;$$

$$2) \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4};$$

$$5) \frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x};$$

$$3) \frac{9}{x+3} + \frac{14}{x-3} = \frac{24}{x};$$

$$6) \frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0.$$

764.* При каком значении переменной:

$$1) \text{ сумма дробей } \frac{24}{x-2} \text{ и } \frac{16}{x+2} \text{ равна } 3;$$

$$2) \text{ значение дроби } \frac{42}{x} \text{ на } \frac{1}{4} \text{ больше значения дроби } \frac{36}{x+20}?$$

765.* При каком значении переменной:

$$1) \text{ значение дроби } \frac{30}{x+3} \text{ на } \frac{1}{2} \text{ меньше значения дроби } \frac{30}{x};$$

$$2) \text{ значение дроби } \frac{20}{x} \text{ на } 9 \text{ больше значения дроби } \frac{20}{x+18}?$$

766.** Решите уравнение:

$$1) \frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1};$$

$$3) \frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2};$$

$$2) \frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3};$$

$$4) \frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}.$$

767.* Решите уравнение:

$$1) \frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2}; \quad 2) \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}.$$

768.* Решите уравнение методом замены переменной:

$$\begin{aligned} 1) (x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 &= 0; \\ 2) (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 &= 0; \\ 3) (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) &= 3; \\ 4) (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) &= -5. \end{aligned}$$

769.* Решите уравнение методом замены переменной:

$$1) \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0; \quad 2) \frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}.$$

770.* Решите уравнение:

$$\begin{aligned} 1) (x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56 &= 0; \\ 2) (x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) &= 63; \\ 3) \frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 &= 0; \\ 4) \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

771.* Для каждого значения a решите уравнение:

$$\begin{aligned} 1) \frac{x^2 - 8x + 7}{x - a} &= 0; & 3) \frac{x^2 - (3a+2)x + 6a}{x - 6} &= 0; \\ 2) \frac{x - a}{x^2 - 8x + 7} &= 0; & 4) \frac{a(x-a)}{x+3} &= 0. \end{aligned}$$

772.* При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$ имеет единственный корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

773. Верно ли утверждение, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$(a-1)^2 \left(\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-2a+1} \right) + \frac{2}{a+1}$$

является положительным числом?

774. Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения

$$\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} - \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}?$$

775. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{если } x < -2, \\ x^2, & \text{если } x \geq -2. \end{cases}$$

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

776. На экране монитора компьютера записано число 1. Ежесекундно компьютер прибавляет к числу, находящемуся на экране, сумму его цифр. Может ли через некоторое время на экране появиться число 123 456 789?

Решение уравнений методом замены переменной



В п. 22 вы ознакомились с решением уравнений методом замены переменной. Рассмотрим еще несколько примеров, иллюстрирующих эффективность этого метода.

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} - \frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$.

Решение. Пусть $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = t$. Тогда $\frac{8x}{x^2 - 3x - 6} = \frac{8}{t}$. Получаем уравнение $t - \frac{8}{t} = -2$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда $t_1 = -4$, $t_2 = 2$.

Теперь решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

1) $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = -4$;

2) $\frac{x^2 - 3x - 6}{x} = 2$.

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: -3; -1; 2; 6. ▲

ПРИМЕР 2 Решите уравнение $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

Решение. Преобразуем это уравнение:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Пусть $2x^2 + 3x - 1 = t$. Тогда $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Следовательно, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ или $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Решив эти два квадратных уравнения, получаем ответ.

Ответ: -2 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1 . ▲

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

Решение. С помощью проверки легко убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части данного уравнения на x^2 , перейдем к равносильному уравнению:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

$$\text{Отсюда} \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right) \left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$$

Произведем замену: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тогда $2x + 5 + \frac{1}{x} = t + 8$. Получаем уравнение $t(t + 8) = 9$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

С учетом замены получаем два уравнения:

$$1) \quad 2x + \frac{1}{x} - 3 = 1;$$

$$2) \quad 2x + \frac{1}{x} - 3 = -9.$$

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$. ▲

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

Решение. Пусть $x + \frac{1}{x} = t$. Тогда $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$.

$$\text{Отсюда} \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Такая замена позволяет переписать исходное уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} 7t - 2(t^2 - 2) &= 9; \\ 2t^2 - 7t + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

Следовательно, $x + \frac{1}{x} = 1$ или $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2. ▲

ПРИМЕР 5 Решите уравнение $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$.

Решение. С помощью проверки можно убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Следовательно, можно разделить обе части уравнения на x^2 . Получим уравнение, равносильное исходному:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10.$$

Замена $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводит к квадратному уравнению

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; -1; -2. ▲

Может возникнуть вопрос: почему при решении примеров 1–5 мы не пытались упростить уравнения с помощью тождественных преобразований?

Дело в том, что после тождественных преобразований нам пришлось бы решать уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (вы можете убедиться в этом самостоятельно). При $a \neq 0$ такое уравнение называют **уравнением четвертой степени**, при $a = 0$ и $b \neq 0$ — **уравнением третьей степени**. Частным случаем этого уравнения, когда $b = 0$ и $d = 0$, является биквадратное уравнение. Его вы решать умеете.

В общем случае для решения уравнений третьей и четвертой степеней необходимо знать формулы нахождения их корней. С историей открытия этих формул вы можете ознакомиться в следующем рассказе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите уравнение:

1) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

$$2) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$$

$$3) x(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$$

$$4) (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$$

$$5) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$$

$$6) 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1);$$

$$7) (x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82.$$

Секретное оружие Сципиона дель Ферро



Вы легко решите каждое из следующих уравнений третьей степени:

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad x^3 - x = 0.$$

Все они являются частными случаями уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где x — переменная, a, b, c и d — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Вывести формулу его корней — задача сложная. Недаром появление этой формулы считают выдающимся математическим открытием XVI века.

Первым изобрел способ решения уравнения вида $x^3 + px = q$, где p и q — положительные числа, итальянский математик Сципион дель Ферро (1465–1526). Найденную формулу он хранил в секрете. Это было обусловлено тем, что карьера ученого того времени во многом зависела от его выступлений в публичных математических турнирах. Поэтому было выгодно хранить открытия в тайне, рассчитывая использовать их в математических соревнованиях как секретное оружие.

После смерти дель Ферро его ученик Фиоре, владея секретной формулой, вызвал на математический поединок талантливого математика-самоучку Никколо Тарталья. За несколько дней до турнира Тарталья сам вывел формулу корней уравнения третьей степени. Диспут, на котором Тарталья одержал убедительную победу, состоялся 20 февраля 1535 года.

Впервые секретная формула была опубликована в книге известного итальянского ученого Джероламо Кардано «Великое искусство». В этой работе также описан метод решения уравнения четвертой степени, открытый Людовико Феррари (1522–1565).

В XVII–XVIII вв. усилия многих ведущих математиков были сосредоточены на поиске формулы для решения уравнений пятой сте-

пени. Получению результата способствовали работы итальянского математика Паоло Руффини (1765–1822) и норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. Сам результат оказался абсолютно неожиданным: было доказано, что не существует формулы, с помощью которой можно выразить корни любого уравнения пятой и более высоких степеней через коэффициенты уравнения, используя лишь четыре арифметических действия и действие извлечения корня.



Никколо
Тарталья
(1499–1557)



Джероламо
Кардано
(1501–1576)



Нильс Хенрик
Абель
(1802–1829)

23. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций

В п. 7 вы уже ознакомились с задачами, в которых рациональные уравнения служили математическими моделями реальных ситуаций. Теперь, когда вы научились решать квадратные уравнения, можно существенно расширить круг рассматриваемых задач.

ПРИМЕР 1 Из пункта А выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта А. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.

Решение. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x + 18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Разность $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18}$

показывает, на сколько часов грузовик проезжает 15 км быстрее, чем велосипедист. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, то есть на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то получаем уравнение

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}.$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} &= \frac{3}{4}; \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} &= \frac{1}{4}; \\ \frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x(x+18)} &= 0; \\ \begin{cases} x^2+18x-360=0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases} \end{aligned}$$

Решив квадратное уравнение системы, получим $x = 12$ или $x = -30$.

Корень -30 не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет: $12 + 18 = 30$ (км/ч).

Ответ: 12 км/ч, 30 км/ч. ▲

ПРИМЕР 2 Одна бригада работала на ремонте дороги 7 ч, после чего к ней присоединилась вторая бригада. Через 2 ч их совместной работы ремонт был завершен. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно, если первой для этого требуется на 4 ч больше, чем второй?

Решение. Пусть первая бригада может самостоятельно отремонтировать дорогу за x ч, тогда второй для этого нужно $(x - 4)$ ч.

За 1 ч первая бригада ремонтирует $\frac{1}{x}$ часть дороги, а вторая —

$\frac{1}{x-4}$ часть дороги. Первая бригада работала 9 ч и отремонтировала

ла $\frac{9}{x}$ дороги, а вторая бригада работала 2 ч и отремонтировала

соответственно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Поскольку в результате была отремон-

тирована вся дорога, то можно составить уравнение $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 12$ и $x_2 = 3$ (убедитесь в этом самостоятельно). Второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку тогда вторая бригада могла бы отремонтировать дорогу за $3 - 4 = -1$ (ч), что не имеет смысла.

Следовательно, первая бригада может отремонтировать дорогу за 12 ч, а вторая — за 8 ч.

Ответ: 12 ч, 8 ч. ▲

ПРИМЕР 3 Водный раствор соли содержал 120 г воды. После того как в раствор добавили 10 г соли, его концентрация увеличилась на 5 %. Сколько граммов соли содержал раствор первоначально?

Решение. Пусть исходный раствор содержал x г соли. Тогда его масса была равна $(x + 120)$ г, а концентрация соли составляла $\frac{x}{x+120}$. После того как к раствору добавили 10 г соли, ее масса в растворе составила $(x + 10)$ г, а масса раствора — $(x + 130)$ г. Теперь концентрация соли составляет $\frac{x+10}{x+130}$, что на 5 %, то есть на

$$\frac{1}{20}, \text{ больше, чем } \frac{x}{x+120}. \text{ Отсюда можно записать: } \frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}.$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 30$ и $x_2 = -280$ (убедитесь в этом самостоятельно), из которых второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, раствор содержал первоначально 30 г соли.

Ответ: 30 г. ▲

УПРАЖНЕНИЯ

- 777.*** Первые 150 км дороги из города A в город B автомобиль проехал с некоторой скоростью, а остальные 240 км — со скоростью на 5 км/ч большей. Найдите первоначальную скорость автомобиля, если на весь путь из города A в город B он потратил 5 ч.
- 778.*** Первый мотоциклист проезжает 90 км на 18 мин быстрее, чем второй, поскольку его скорость на 10 км/ч больше скорости второго мотоциклиста. Найдите скорость каждого мотоциклиста.
- 779.*** Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус двигался со скоростью на 20 км/ч меньшей, чем автомобиль, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорость автомобиля и скорость автобуса.

780.* Поезд опаздывал на 10 мин. Чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, он за 80 км от этой станции увеличил скорость на 16 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

781.* Из села Вишневое в село Яблоневое, расстояние между которыми равно 15 км, всадник проскакал с некоторой скоростью. Возвращался он со скоростью на 3 км/ч большей и потратил на обратный путь на 15 мин меньше, чем на путь из Вишневого в Яблоневое. Найдите первоначальную скорость всадника.

782.* Оператор компьютерного набора должен был за некоторое время набрать 180 страниц текста. Однако он выполнил эту работу на 5 ч раньше срока, так как набирал на 3 страницы в час больше, чем планировал. Сколько страниц в час он набирал?

783.* Первый насос перекачивает 90 м^3 воды на 1 ч быстрее, чем второй 100 м^3 . Сколько кубических метров воды за 1 ч перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем второй?

784.* Рабочий должен был за определенное время изготовить 72 детали. Однако ежедневно он изготавливал на 4 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?

785.* Катер прошел 16 км по течению реки и 30 км против течения, потратив на весь путь 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 1 км/ч.

786.* Лодка проплыла 15 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на обратный путь на 1 ч больше. Найдите скорость лодки по течению реки, если скорость течения составляет 2 км/ч.

787.* По течению реки от пристани отплыл плот. Через 4 ч от этой пристани в том же направлении отчалила лодка, догнавшая плот на расстоянии 15 км от пристани. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 12 км/ч.

788.* Катер прошел 45 км по течению реки и 28 км против течения, потратив на весь путь 4 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера составляет 18 км/ч.

789.* Турист проплыл $\frac{5}{8}$ всего пути на катере, а остальную часть проехал на автомобиле. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости катера. На автомобиле он ехал на 1 ч 30 мин меньше, чем плыл на катере. Найдите скорость автомобиля и скорость катера, если всего турист преодолел 160 км.

- 790.*** Междугородный автобус должен был проехать 72 км. После того как он проехал 24 км, его задержали на железнодорожном переезде на 12 мин. Потом он увеличил скорость на 12 км/ч и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите первоначальную скорость автобуса.
- 791.*** Группа школьников выехала на экскурсию из города A в город B на автобусе, а вернулась в город A по железной дороге, потратив на обратный путь на 30 мин больше, чем на путь в город B . Найдите скорость поезда, если она на 20 км/ч меньше скорости автобуса, расстояние по шоссе между городами A и B составляет 160 км, а длина железной дороги — 150 км.
- 792.*** Турист проплыл на байдарке 4 км по озеру и 5 км по течению реки за то же время, за которое он проплыл бы 6 км против течения. С какой скоростью турист плыл по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?
- 793.*** Теплоход прошел 16 км по озеру, а затем 18 км по реке, берущей начало из этого озера, за 1 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 4 км/ч.
- 794.*** Знаменатель обыкновенной дроби на 3 больше ее числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 4, а знаменатель — на 8, то полученная дробь будет на $\frac{1}{6}$ больше исходной. Найдите исходную дробь.
- 795.*** Числитель обыкновенной дроби на 5 меньше ее знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 4, то полученная дробь будет на $\frac{1}{3}$ меньше исходной. Найдите исходную дробь.
- 796.*** Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному из них нужно для этого на 9 дней больше, чем другому?
- 797.*** Одному маляру требуется на 5 ч больше, чем другому, чтобы покрасить фасад дома. Когда первый маляр проработал 3 ч, а потом его сменил второй, проработавший 2 ч, то оказалось, что покрашено 40 % площади фасада. За какое время может покрасить фасад каждый маляр, работая самостоятельно?

- 798.*** В первый день тракторист пахал поле 6 ч. На следующий день к нему присоединился второй тракторист, и через 8 ч совместной работы они закончили вспашку. За какое время может вспахать это поле каждый тракторист, работая самостоятельно, если первому для этого надо на 3 ч меньше, чем второму?
- 799.*** В раствор, содержащий 20 г соли, добавили 100 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Сколько граммов воды содержал раствор первоначально?
- 800.*** Слиток сплава меди и цинка, содержащий 10 кг цинка, сплавляли с 10 кг меди. Процентное содержание меди в полученном сплаве оказалось на 5 % больше, чем в исходном. Сколько килограммов меди содержал исходный слиток сплава?
- 801.**** Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани *A* по течению реки навстречу ему от пристани *B* отошел катер. Найдите скорость течения реки, если плот и катер встретились на расстоянии 14 км от пристани *A*, скорость катера в стоячей воде равна 12 км/ч, а расстояние между пристанями *A* и *B* составляет 32 км.
- 802.**** К бассейну подведены две трубы. Через одну трубу воду наливают в бассейн, а через другую сливают, причем на слив воды требуется на 1 ч больше, чем на наполнение бассейна. Если же открыть обе трубы одновременно, то бассейн наполнится водой за 30 ч. За сколько часов можно наполнить пустой бассейн водой через первую трубу?
- 803.**** Для наполнения бассейна через первую трубу требуется столько же времени, как и для наполнения через вторую и третью трубы одновременно. Через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч быстрее, чем через вторую, и на 8 ч быстрее, чем через третью. Сколько времени требуется для наполнения бассейна через каждую трубу?
- 804.**** Автобус должен был проехать расстояние между двумя городами, равное 400 км, с некоторой скоростью. Проехав 2 ч с запланированной скоростью, он остановился на 20 мин, а потом, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, увеличил скорость движения на 10 км/ч. С какой скоростью автобус должен был проехать расстояние между городами?
- 805.**** Рабочий должен был за некоторое время изготовить 360 деталей. Первые 5 дней он ежедневно изготавливал запланиро-

ванное количество деталей, а затем ежедневно изготавливал на 4 детали больше, и уже за день до срока изготовил 372 детали. Сколько деталей ежедневно должен был изготавливать рабочий по плану?

806. Чтобы выполнить некоторое производственное задание, первому рабочему требуется на 12 ч меньше, чем второму, и на 4 ч больше, чем обоим рабочим для совместного выполнения задания. За сколько часов может выполнить это задание первый рабочий?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

807. Вычислите:

1) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; 2) $\frac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2 \cdot 1000^{-6}$.

808. Найдите значение выражения $a^2 - 2a\sqrt{5} + 2$ при $a = \sqrt{5} - 3$.

809. Постройте график функции $y = -2x + 4$.

1) Чему равен нуль данной функции?

2) Укажите значения x , при которых $y > 0$.

3) Проходит ли график функции через точку $M(-36; 68)$?

810. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-\sqrt{12}; \sqrt{3})$? Постройте этот график.

811. Какое из равенств верно:

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3}-2 \quad \text{или} \quad \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = 2-\sqrt{3}?$$

Ответ обоснуйте.

812. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0,2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

813. На тарелке лежат 9 кусочков сыра разной массы. Докажите, что можно один из кусочков сыра разрезать на две части так, что полученные 10 кусочков можно будет разложить на две тарелки и при этом масса сыра на каждой из них будет одинаковой.

Первая ЭВМ в Европе



Бурное развитие вычислительной техники за последние десятилетия породило целый ряд новых математических дисциплин и предложило новый метод научных и прикладных исследований — моделирование процессов на электронно-вычислительных машинах.

Сегодня трудно представить свою жизнь без компьютеров. И тем сложнее поверить, что их история насчитывает менее ста лет.

Первая в мире электронно-вычислительная машина ЭНИАК была создана в США в конце 40-х гг. XX в. и предназначалась для расчетов траектории полета снарядов береговой артиллерии.

А первая в Европе электронно-вычислительная машина была создана в Киеве.

В конце 1947 г. лаборатория спецмоделирования и электронной техники Института электротехники Академии наук Украины под руководством академика Сергея Алексеевича Лебедева начала работу над созданием так называемой «модели электронной счетной машины» — МЭСМ. И уже в декабре 1951 г. МЭСМ решала практические задачи, которые для нее программировали сотрудники Института математики АН Украины. Более года МЭСМ была не только первой, но и единственной ЭВМ в континентальной Европе.

В 1957 г. был создан Вычислительный центр Академии наук Украины, который в 1962 г. был преобразован в Институт кибернетики.

Первые задачи, которые выполнялись на ЭВМ, служили потребностям атомной и ракетной техники, рассчитывали траектории



**Дом в предместье Киева —
Феофании, где была создана МЭСМ**



**С. А. Лебедев
(1902–1974)**

пилотируемых и беспилотных систем в реальном масштабе времени, осуществляли выбор оптимальных конструкций среди множества возможных вариантов. Такие задачи характерны для быстродействующих компьютеров и сегодня.

Институт кибернетики был колыбелью вычислительной техники Советского Союза, отечественных научных кадров в области кибернетики, информатики, вычислительной техники. Научные результаты его сотрудников известны во всем мире. И сегодня основы построения элементной базы вычислительной техники, математического моделирования, теории автоматов, автоматизированных систем управления, других компьютерных дисциплин во многом базируются на трудах украинских ученых. Ученые института основали всемирно известные научные школы математической кибернетики и теории вычислительных машин и систем, теории оптимизации и системного анализа, математического моделирования, математической теории надежности, теории программирования и т. д.

В 1992–1997 гг. на базе автономных подразделений Института кибернетики были созданы Институт программных систем Национальной академии наук (НАН) Украины, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Институт космических исследований НАН Украины и Национального космического агентства Украины, Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа» Министерства образования и науки (МОН) Украины и НАН Украины, Международный научно-учебный центр информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, которые вошли в состав созданного в 1992 г. Кибернетического центра НАН Украины.



В. М. Глушков
(1923–1982)

Академик, основатель и директор
Института кибернетики
Академии наук Украины



**Институт кибернетики
имени В. М. Глушкова
НАН Украины**

ЗАДАНИЕ № 6 «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Найдите корни квадратного трехчлена $5x^2 - x - 6$.
А) 2; -0,6; Б) -2; 0,6; В) 1; -1,2; Г) -1; 1,2.
2. Разложите на множители квадратный трехчлен $-x^2 - 4x + 5$.
А) $(x - 1)(x + 5)$; В) $-(x - 1)(x + 5)$;
Б) $(x + 1)(x - 5)$; Г) $-(x + 1)(x - 5)$.
3. Сократите дробь $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 6}$.
А) $\frac{x+4}{x-2}$; Б) $\frac{x-4}{x-2}$; В) $\frac{x+4}{x+2}$; Г) $\frac{x-4}{x+2}$.
4. Решите уравнение $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.
А) -3; 3; В) -3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3;
Б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2}$; 3.
5. Найдите корни уравнения $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.
А) -1; 1; 3; 5; Б) -1; 5; В) 1; 3; Г) 1; 3; 5.
6. Решите уравнение $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.
А) -3; 4; Б) -2; 2; В) 16; Г) 9; 16.
7. Решите уравнение $\frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}$.
А) -2; Б) 3; В) -2; 3; Г) -3; 2.
8. Решите уравнение $\frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$.
А) $-\frac{4}{3}$; 2; Б) $\frac{4}{3}$; -2; В) $-\frac{4}{3}$; Г) 2.
9. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 350 км, выехали одновременно грузовой и легковой автомобили. Скорость грузовика на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля, в результате чего грузовик прибыл в пункт назначения на 2 ч позже легкового автомобиля.
Пусть скорость грузового автомобиля равна x км/ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?
А) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x + 20} = 2$; В) $\frac{350}{x + 20} - \frac{350}{x} = 2$;
Б) $\frac{350}{x} + \frac{350}{x + 20} = 2$; Г) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x - 20} = 2$.

10. Катер проплыл 30 км по течению реки и вернулся обратно, потратив на весь путь 3 ч 10 мин. Скорость течения реки равна 1 км/ч.

Пусть собственная скорость катера составляет x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3,1;$

В) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x} = 3\frac{1}{6};$

Б) $\frac{30}{x+1} - \frac{30}{x-1} = 3,1;$

Г) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3\frac{1}{6}.$

11. Рабочий должен был за некоторое время изготовить 96 деталей. Ежедневно он изготавливал на 2 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока.

Пусть рабочий изготавливал ежедневно x деталей. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-2} = 3;$

В) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-3} = 2;$

Б) $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 3;$

Г) $\frac{96}{x-3} - \frac{96}{x} = 2.$

12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое производственное задание за 10 ч, причем первый из них может выполнить это задание самостоятельно на 15 ч быстрее, чем второй. Пусть первый рабочий может самостоятельно выполнить задание за x ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\frac{15}{x} + \frac{15}{10-x} = 1;$

В) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x+15} = 1;$

Б) $\frac{15}{x} + \frac{15}{x-10} = 1;$

Г) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x-15} = 1.$

ГЛАВНОЕ В ПАРАГРАФЕ 3

Уравнение первой степени

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют уравнением первой степени.

Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратным уравнением.

Приведенное квадратное уравнение

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют приведенным.

Неполное квадратное уравнение

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Решение неполного квадратного уравнения

Коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	Неполное квадратное уравнение	Корни
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Дискриминант квадратного уравнения

Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, его дискриминант D — это значение выражения $b^2 - 4ac$.

Решение квадратного уравнения

Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$,

то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратный трехчлен

Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют квадратным трехчленом.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трехчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Биквадратное уравнение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

814. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, если $m = -4$, $n = 3$;

2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, если $a = -0,8$.

815. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $7b - 11$;

8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;

2) $\frac{9}{x}$;

9) $\frac{4}{x^2-25}$;

3) $\frac{5}{2-y}$;

10) $\frac{3}{|x|-5}$;

4) $\frac{m-3}{7}$;

11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;

5) $\frac{3+t}{4-t}$;

12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;

6) $\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x-6}$;

13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;

7) $\frac{5}{x^8+3}$;

14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

816. Сократите дробь:

1) $\frac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$;

2) $\frac{25mn^2}{75m^8n}$;

3) $\frac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$;

4) $\frac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$.

817. Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $4mn^2p : (28m^2np^6)$;

3) $-63xy^9 : (-72xy^7)$.

2) $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$;

818. Сократите дробь:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;

3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;

2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;

4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;

5) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9};$

6) $\frac{b^7 + b^4}{b^2 + b^5};$

7) $\frac{a^3 + 64}{3a + 12};$

8) $\frac{xb - 5y + 5b - xy}{x^2 - 25};$

9) $\frac{7m^2 - 7m + 7}{14m^3 + 14};$

10) $\frac{a^2 + bc - b^2 + ac}{ab + c^2 + ac - b^2};$

11) $\frac{20mn^2 - 20m^2n + 5m^3}{10mn - 5m^2};$

12) $\frac{x^2 - yz + xz - y^2}{x^2 + yz - xz - y^2}.$

819. Найдите значение выражения:

1) $\frac{x^5 y^7 - x^3 y^9}{x^3 y^7},$ если $x = -0,2, y = 0,5;$

2) $\frac{4a^2 - 36}{5a^2 - 30a + 45},$ если $a = 2;$

3) $\frac{(3a + 3b)^2}{3a^2 - 3b^2},$ если $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{6};$

4) $\frac{20x^2 - 140xy + 245y^2}{4x - 14y},$ если $2x - 7y = -0,5.$

820. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}};$

4) $\frac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+3}};$

2) $\frac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n};$

5) $\frac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}.$

3) $\frac{5^{n+1} - 5^n}{2 \cdot 5^n};$

821. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a + 2)x = 7;$

3) $(a + 3)x = a^2 + 6a + 9;$

2) $(a + 6)x = a + 6;$

4) $(a^2 - 4)x = a - 2.$

822. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7a}{22} + \frac{4a}{22};$

4) $\frac{x+y}{9p} - \frac{x}{9p};$

7) $\frac{6a^2 - 4a}{15a} - \frac{a^2 + a}{15a};$

2) $\frac{8x}{3y} - \frac{5x}{3y};$

5) $\frac{a}{8} - \frac{a-b}{8};$

8) $\frac{x-y}{8} + \frac{x+y}{8};$

3) $\frac{7x-2y}{15p} + \frac{3x+7y}{15p};$

6) $\frac{7p-17}{5k} + \frac{7-2p}{5k};$

9) $\frac{10x-6}{x} - \frac{4x+11}{x}.$

823. Упростите выражение:

1) $\frac{7y}{y^2-4} - \frac{14}{y^2-4};$

2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2} - \frac{7y-25}{25-y^2};$

3) $\frac{9p+5}{3p+6} - \frac{10p-12}{3p+6} + \frac{9p-1}{3p+6};$

4) $\frac{7x+5}{3-x} + \frac{5x+11}{x-3};$

5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4} + \frac{(a-3)^2}{4-4a};$

6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2} - \frac{x-4}{(x-2)^2};$

7) $\frac{7}{a-2} - \frac{b}{2-a};$

8) $\frac{6a}{5-a} - \frac{4a}{a-5}.$

824. Выполните действия:

1) $\frac{8}{x} - \frac{5}{y};$

2) $\frac{7}{ab} + \frac{5}{b};$

3) $\frac{5}{24xy} - \frac{7}{18xy};$

4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2} - \frac{2b-1}{a^2b}.$

825. Выполните действия:

1) $\frac{2a-1}{a-4} - \frac{3a+2}{2(a-4)};$

2) $\frac{x+2}{3x+9} - \frac{4-x}{5x+15};$

3) $\frac{m+1}{m-3} - \frac{m+2}{m+3};$

4) $\frac{x}{x+y} - \frac{2y^2}{y^2-x^2} - \frac{y}{x-y};$

5) $\frac{m}{3m-2n} - \frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2};$

6) $\frac{a+3}{a^2-2a} - \frac{a-2}{5a-10} + \frac{a+2}{5a};$

7) $\frac{3}{3a-3} - \frac{a-1}{2a^2-4a+2};$

8) $2 - \frac{14}{m-2} - m;$

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9} - \frac{8}{x^2-9} - \frac{2x-1}{x^2+6x+9}.$

826. Докажите тождество

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)} - \frac{1}{(a-b)(c-b)} + \frac{1}{(a-c)(b-a)} = 0.$$

827. Запишите дробь в виде суммы целого выражения и дроби:

$$1) \frac{a-7}{a}; \quad 2) \frac{a^2+2a-2}{a+2}; \quad 3) \frac{x^2+3x-2}{x-3}.$$

828. Известно, что $\frac{x}{y} = 4$. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{x+y}{x}; \quad 2) \frac{3x+4y}{x}.$$

829. Найдите все натуральные значения n , при которых является натуральным числом значение выражения:

$$1) \frac{12n^2-5n+33}{n}; \quad 2) \frac{n^3-6n^2+54}{n^2}; \quad 3) \frac{10-4n}{n}; \quad 4) \frac{12-3n}{n}.$$

830. Выразите переменную x через другие переменные, если:

$$1) x + \frac{a}{b} = 1; \quad 2) \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b; \quad 3) \frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a}.$$

831. Докажите тождество:

$$1) \frac{1}{a^2+12a+36} + \frac{2}{36-a^2} + \frac{1}{a^2-12a+36} = \frac{144}{(a^2-36)^2};$$

$$2) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

832.* Упростите выражение

$$\frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

833.* Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b = 0$ или $c = 0$.

834. Выполните умножение:

$$1) \frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{24x}; \quad 3) \frac{16a^4}{21b^5} \cdot \frac{9b^2}{10a^3}; \quad 5) \frac{24t^7}{16u^3} \cdot 34u^5;$$

$$2) \frac{m^2n^3}{25t} \cdot \left(\frac{-5t}{mn^2}\right); \quad 4) 26m^2 \cdot \frac{3n^2}{13m^4}; \quad 6) \frac{4x^5y^2}{7a^3b} \cdot \frac{21xb^2}{10y^3a^2} \cdot \frac{25a^5y}{3x^4b}.$$

835. Выполните умножение:

$$1) \frac{2xy-y^2}{9} \cdot \frac{36}{y^4}; \quad 3) \frac{m^2-64}{m^3-9m^2} \cdot \frac{m^2-81}{m^2+8m};$$

$$2) \frac{a^2-7ab}{a^2+2ab} \cdot \frac{a^2b+2ab^2}{a^3-7a^2b}; \quad 4) \frac{2x^2-16x+32}{3x^2-6x+12} \cdot \frac{x^3+8}{4x^2-64}.$$

836. Представьте выражение в виде дроби:

$$1) \left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2; \quad 2) \left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4; \quad 3) \left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3; \quad 4) \left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3.$$

837. Выполните деление:

$$1) \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} : \frac{x - 5}{x - 10};$$

$$2) \frac{a^2 - 1}{a - 8} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a - 8};$$

$$3) \frac{ab + b^2}{8b} : \frac{ab + a^2}{2a};$$

$$4) \frac{2c - 3}{c - 1} : (2c - 3);$$

$$5) \frac{x^2 - 16y^2}{25x^2 - 4y^2} : \frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{25x^2 + 20xy + 4y^2};$$

$$6) \frac{n^2 - 3n}{49n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{49n^2 - 14n + 1};$$

$$7) \frac{m^{12} - n^{15}}{2m^{10} - 8n^{14}} : \frac{5m^8 + 5m^4n^5 + 5n^{10}}{3m^5 + 6n^7};$$

$$8) \frac{5a^2 - 20ab}{3a^2 + b^2} : \frac{30(a - 4b)^2}{9a^4 - b^4}.$$

838. Полагая данные дроби несократимыми, замените x и y такими одночленами, чтобы образовалось тождество.

$$1) \frac{x}{7a^2b^3} \cdot \frac{y}{4c} = \frac{6a^3c^2}{b};$$

$$2) \frac{36m^2n^4}{x} : \frac{y}{35p^6} = \frac{21n}{5mp^3}.$$

839. Дано: $3x - \frac{1}{x} = 8$. Найдите значение выражения $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

840. Дано: $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Найдите значение выражения $2x - \frac{1}{x}$.

841. Упростите выражение:

$$1) \frac{x^{3k}}{y^{2n}} : \frac{x^{6k}}{y^{5n}}, \text{ где } k \text{ и } n \text{ — целые числа};$$

$$2) \frac{a^{k+5} \cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}} : \frac{a^{k+3} \cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}, \text{ где } k \text{ — целое число};$$

$$3) \frac{(x^n + 3y^n)^2 - 12x^n y^n}{x^{3n} + 27y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 9y^{2n}}{(x^n - 3y^n)^2 + 12x^n y^n}, \text{ где } n \text{ — целое число}.$$

842. Упростите выражение:

$$1) \left(\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} \right) \cdot \frac{16-a^2}{32a^3};$$

$$2) \left(7x - \frac{4x}{x-3} \right) : \frac{14x-50}{3x-9};$$

$$3) \frac{2a}{a-2} + \frac{a+7}{8-4a} \cdot \frac{32}{7a+a^2};$$

$$4) \left(\frac{9c}{c-8} + \frac{7c}{c^2-16c+64} \right) : \frac{9c-65}{c^2-64} - \frac{8c+64}{c-8};$$

$$5) \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right);$$

$$6) \left(\frac{b}{b+6} + \frac{36+b^2}{36-b^2} - \frac{b}{b-6} \right) : \frac{6b+b^2}{(6-b)^2};$$

$$7) \left(\frac{2x}{x^3+1} : \frac{1-x}{x^2-x+1} + \frac{2}{x-1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{4} : \frac{x-1}{x+1}.$$

843. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{6}{9-a^2} + \frac{9}{(a+3)^2} \right) : \frac{4(2a-3)^2}{(a^2-9)(a^2-27)} - \frac{2a^2}{9-a^2}$$

не зависит от значения a .

844. Упростите выражение:

$$1) \frac{a + \frac{25}{a+10}}{\frac{25}{a} - a};$$

$$2) 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{1 - \frac{1}{a+1}}}.$$

845. Решите уравнение:

$$1) \frac{2x+6}{x+3} = 2;$$

$$3) \frac{2x-9}{2x+5} + \frac{3x}{3x-2} = 2;$$

$$2) \frac{x^2-16}{x+4} = -8;$$

$$4) \frac{5x^2+8}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}.$$

846. Для каждого значения a решите уравнение:

$$1) \frac{x+2}{x+a} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x-1} = 0.$$

847. Найдите значение выражения:

$$1) 2^{-3} + 4^{-2};$$

$$3) \left(\frac{1}{3} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2;$$

$$2) \left(\frac{3}{5} \right)^{-2} + (-1,8)^0 - 5^{-1};$$

$$4) 2^{-3} - 6^{-1} + 3^{-2}.$$

848. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными и нулевыми показателями:

$$1) \frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4};$$

$$2) \frac{1,001^0 m^{-15} n^{-7} p^{-4}}{2^{-3} a^{-11} b^{16} c^{-22}}.$$

849. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями:

$$1) a^{-7} \cdot a^{10};$$

$$2) a^{-9} \cdot a^5;$$

3) $a^{17} \cdot a^{-4} \cdot a^{-11}$;

4) $a^{-2} : a^3$;

5) $a^{12} : a^{-4}$;

6) $a^{-7} : a^{-11}$;

7) $a^{-12} : a^{-10} \cdot a^4$;

8) $(a^3)^{-5}$;

9) $(a^{-12})^{-2}$;

10) $(a^{-3})^4 : (a^{-2})^5 : (a^{-1})^{-7}$;

11) $(m^{-3}n^4p^7)^{-4}$;

12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;

13) $(x^3y^{-4})^5 \cdot (x^{-2}y^{-3})^3$;

14) $\left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3}$;

15) $\left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

850. Найдите значение выражения:

1) $11^{-23} \cdot 11^{25}$;

2) $3^{17} \cdot 3^{-14}$;

3) $4^{-16} : 4^{-12}$;

4) $10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2}$;

5) $(14^{-10})^5 \cdot (14^{-6})^{-8}$;

6) $\frac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^2}$.

851. Найдите значение выражения:

1) $25^{-3} \cdot 5^8$;

2) $64^{-3} : 32^{-3}$;

3) $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0,001)^{-5}$;

4) $\frac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$;

5) $\frac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$.

6) $\frac{(0,125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

852. Упростите выражение:

1) $\frac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \frac{5}{9}x^4y^{-7}$;

2) $0,2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0,3a^{10}b^7 \cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $0,36a^{-5}b^6c^3 \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)a^4b^{-4}c^{-5}$;

5) $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$;

6) $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$;

7) $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0,1a^2b^{-3}c)^{-3}$;

8) $0,1m^{-5}n^4 \cdot (0,01m^{-3}n)^{-2}$;

9) $-6\frac{1}{4}a^{-7}b^4 \cdot \left(\frac{5}{2}a^{-2}b^2\right)^{-3}$;

10) $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b^3\right)^{-3}$.

11) $\frac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \frac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;

12) $\left(\frac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot (27x^{-2}y^4)^2$.

853. Упростите выражение:

1) $(a^{-5} - 1)(a^{-5} + 1) - (a^{-5} - 2)^2$;

2) $\frac{y^{-2} - x^{-2}}{x + y}$;

3) $\frac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \frac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}}$;

4) $\frac{m^{-4} + n^{-4}}{n^{-10}} : \frac{m^{-4}n^{-6} + n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} : \left(\frac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} - \frac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-2}} \right)$;

6) $\frac{x^{-10} - 4}{x^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-5} + 2} - \frac{x^{-5} + 2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6} + 1} - \frac{c^{-6}}{c^{-12} + 2c^{-6} + 1} \right) : \frac{4c^{-6} + 3}{c^{-12} - 1} + \frac{2c^{-6}}{c^{-6} + 1}$.

854. Выполните действия и представьте результат в стандартном виде:

1) $1,3 \cdot 10^4 + 1,8 \cdot 10^5$;

3) $5,6 \cdot 10^3 - 3,2 \cdot 10^2$;

2) $1,5 \cdot 10^2 - 2,8 \cdot 10^{-2}$;

4) $4,8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$.

855. Сократите дробь (n — целое число):

1) $\frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;

4) $\frac{a^6 + a^{11}}{a^{-4} + a}$;

7) $\frac{5^{n+2} - 5^{n-2}}{5^n}$;

2) $\frac{7^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{14^n}$;

5) $\frac{a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}}{a^3 + a^2 + a}$;

8) $\frac{2^{-n} + 1}{2^n + 1}$.

3) $\frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{12^n}$;

6) $\frac{6^{n+2} - 6^n}{35}$;

856. Функция задана формулой $y = -\frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: -4; 8; 1,2;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 24; -18; 60.

857. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; -1,5; 4;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: -2; 3; -4,5;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

858. Постройте график функции $y = \frac{5}{|x|}$.

859. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x - 3$ и укажите координаты точек их пересечения.

860. Найдите значение p , если известно, что график функции $y = \frac{p}{x}$ проходит через точку: 1) $A(-3; 2)$; 2) $B\left(-\frac{1}{7}; 3\right)$; 3) $C(-0,4; 1,6)$.

861. Постройте график функции:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{12}{x}, & \text{если } x \leq -3, \\ 1-x, & \text{если } x > -3; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3x-1, & \text{если } x < 2, \\ \frac{10}{x}, & \text{если } 2 \leq x < 5, \\ x-3, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

862. Постройте график функции:

$$1) y = \frac{4x+12}{x^2+3x}; \quad 2) y = \frac{32-2x^2}{x^3-16x}.$$

863. Найдите значение выражения:

$$\begin{aligned} 1) & 0,4\sqrt{625} - \frac{1}{4}\sqrt{144}; & 4) & \sqrt{1\frac{11}{25}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} - 0,04\sqrt{10\,000}; \\ 2) & \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} + \sqrt{2^4+9}; & 5) & \frac{1}{5}\sqrt{625} - \frac{3}{17}\sqrt{289}. \\ 3) & 3\sqrt{0,25} - \sqrt{7^2+24^2}; \end{aligned}$$

864. Найдите значение выражения:

$$\begin{aligned} 1) & (\sqrt{3})^2 - \sqrt{1,69}; & 4) & \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2; \\ 2) & (3\sqrt{15})^2 - (15\sqrt{3})^2; & 5) & \frac{4}{9}\sqrt{39,69} - \frac{5}{49}\sqrt{59,29} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2; \\ 3) & 50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot (3\sqrt{2})^2; & 6) & \frac{1}{2}\sqrt{17^2-15^2} + \left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2 - 0,3\sqrt{900}. \end{aligned}$$

865. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} 1) & \sqrt{x} = 2; & 4) & 2\sqrt{x} - 7 = 0; & 7) & \sqrt{7x} - 4 = 0; \\ 2) & \sqrt{x} = \frac{1}{4}; & 5) & \sqrt{x} + 5 = 0; & 8) & \sqrt{7x-4} = 0; \\ 3) & \sqrt{x} - 3 = 0; & 6) & \frac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0; & 9) & \sqrt{7x-4} = 2; \end{aligned}$$

10) $\frac{28}{\sqrt{x}} = 7;$

11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}} = 3;$

12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}} = 5.$

866. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{9 \cdot 100};$

4) $\sqrt{0,64 \cdot 0,25 \cdot 121};$

7) $\sqrt{\frac{9}{64} \cdot \frac{1024}{1089}};$

2) $\sqrt{0,49 \cdot 16};$

5) $\sqrt{\frac{25}{196}};$

8) $\sqrt{3\frac{13}{36} \cdot 4\frac{29}{49}}.$

3) $\sqrt{676 \cdot 0,04};$

6) $\sqrt{18\frac{1}{16}};$

867. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{75 \cdot 234};$

2) $\sqrt{2 \cdot 800};$

3) $\sqrt{1,6 \cdot 12,1};$

4) $\sqrt{2890 \cdot 2,5}.$

868. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{108} \cdot \sqrt{3};$

3) $\sqrt{160} \cdot \sqrt{250};$

5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}};$

2) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13};$

4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{4,9};$

6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}.$

869. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{(17,1)^2};$

4) $-2,4\sqrt{(-4)^2};$

7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4};$

2) $\sqrt{(-1,17)^2};$

5) $\sqrt{11^4};$

8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0,1)^2}.$

3) $\frac{1}{2}\sqrt{(62)^2};$

6) $\sqrt{(-23)^4};$

870. Упростите выражение:

1) $\sqrt{q^2},$ если $q > 0;$

2) $\sqrt{t^2},$ если $t \leq 0;$

3) $\sqrt{49m^2n^8},$ если $m \geq 0;$

4) $\sqrt{0,81a^6b^{10}},$ если $a \geq 0, b \leq 0;$

5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}},$ если $x \leq 0;$

6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}},$ если $a > 0, c < 0;$

7) $\frac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}},$ если $y > 0, x < 0;$

8) $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}},$ если $x \leq 0.$

871. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;

4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;

5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$.

3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;

872. Упростите выражение:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;

4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}} - \sqrt{66-14\sqrt{17}}$;

2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}} + \sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}} + \sqrt{23-8\sqrt{7}}$;

873. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{24}$;

3) $\sqrt{700}$;

5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$;

7) $-1,6\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{63}$;

4) $\sqrt{0,32}$;

6) $-2,4\sqrt{600}$;

8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

874. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{10a^2}$, если $a \geq 0$;

4) $\sqrt{36m^2n}$, если $m < 0$;

2) $\sqrt{15b^2}$, если $b \leq 0$;

5) $\sqrt{4x^6y^5}$, если $x > 0$;

3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$, если $y \neq 0$;

6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, если $b < 0$.

875. Внесите множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{10}$;

3) $0,3\sqrt{3}$;

5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$;

7) $-0,5\sqrt{30}$;

2) $2\sqrt{13}$;

4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$;

6) $-5\sqrt{7}$;

8) $4\sqrt{a}$.

876. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{5}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $x\sqrt{x^7}$;

4) $n\sqrt{m}$, если $n \leq 0$.

877. Сравните числа:

1) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$;

3) $0,3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{0,3}$;

2) $\sqrt{55}$ и $3\sqrt{6}$;

4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

878. Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{64a} + \sqrt{4a} - \sqrt{121a}$;
- 2) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{320}$;
- 3) $6\sqrt{125a} - 2\sqrt{80a} + 3\sqrt{180a}$.

879. Выполните умножение:

- 1) $(\sqrt{80} - \sqrt{45})\sqrt{5}$;
- 2) $(2\sqrt{6} + \sqrt{54} - \sqrt{96})\sqrt{6}$;
- 3) $(12 - \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})$;
- 4) $(2\sqrt{5} + \sqrt{7})(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$;
- 5) $(\sqrt{19} - \sqrt{13})(\sqrt{19} + \sqrt{13})$;
- 6) $(4\sqrt{m} + 9\sqrt{n})(4\sqrt{m} - 9\sqrt{n})$;
- 7) $(\sqrt{5x} + \sqrt{11y})^2$;
- 8) $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{10})^2$.

880. Сократите дробь:

- 1) $\frac{x^2 - 19}{x + \sqrt{19}}$;
- 2) $\frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$;
- 3) $\frac{m + 8\sqrt{m}}{m - 64}$;
- 4) $\frac{29 - \sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;
- 5) $\frac{a - 6\sqrt{ab} + 9b}{a - 9b}$, если $a > 0, b > 0$;
- 6) $\frac{11 - \sqrt{33}}{\sqrt{33} - 3}$.

881. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- 1) $\frac{a^3}{\sqrt{b}}$;
- 2) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$;
- 3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$;
- 4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$;
- 5) $\frac{n+9}{\sqrt{n+9}}$;
- 6) $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$;
- 7) $\frac{6}{\sqrt{21} + \sqrt{15}}$;
- 8) $\frac{18}{\sqrt{47} - \sqrt{29}}$.

882.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- 1) $\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1}$;
- 2) $\frac{2}{\sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

883. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{5}{4-3\sqrt{2}} - \frac{5}{4+3\sqrt{2}}$;
- 2) $\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1} - \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;
- 3) $(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}})^2$.

884. Упростите выражение:

- 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x}{x-9}$;
- 2) $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right) : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

885.* Упростите выражение:

$$1) \sqrt{(\sqrt{x}+5)^2 - 20\sqrt{x}} + \sqrt{(\sqrt{x}-4)^2 + 16\sqrt{x}};$$

$$2) \sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4} + \sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}.$$

886.* Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

887.* Докажите, что

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 1.$$

888. Расположите в порядке возрастания числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

889. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 6$ и определите координаты точки их пересечения.

890. Между какими двумя последовательными целыми числами находится число: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51,25}$?

891. Какие целые числа расположены на координатной прямой между числами:

$$1) 6 \text{ и } \sqrt{67}; 2) \sqrt{14} \text{ и } \sqrt{52}; 3) -\sqrt{53} \text{ и } -4,9; 4) -\sqrt{31} \text{ и } 2,7?$$

892. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x < 0, \\ 3, & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$

1) Найдите $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.

2) Постройте график данной функции.

893. Решите уравнение:

$$1) x^2 - 4x - 32 = 0;$$

$$5) x^2 + 6x - 15 = 0;$$

$$2) x^2 - 10x + 21 = 0;$$

$$6) 3x^2 - x - 5 = 0;$$

$$3) 6x^2 - 5x + 1 = 0;$$

$$7) 4x^2 + 28x + 49 = 0;$$

$$4) 8x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$8) x^2 - 16x + 71 = 0.$$

894. Решите уравнение:

$$1) (x-4)(x+2) - 2(3x+1)(x-3) = x(x+27);$$

2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;

3) $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$;

4) $\frac{2(x^2 - 9)}{5} - \frac{x + 1}{2} = \frac{x - 41}{4}$;

5) $\frac{x^2 + 5x}{3} - \frac{x + 3}{2} = \frac{2x^2 - 2}{8}$.

895. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$;

3) $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$.

896. Решите уравнение:

1) $|x^2 - 2x - 6| = 6$;

3) $x|x| + 2x - 15 = 0$;

2) $x^2 - 6|x| - 16 = 0$;

4) $\|x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$.

897. Решите уравнение:

1) $x^2 - 6x + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 8$;

2) $(\sqrt{x} - 5)(15x^2 - 7x - 2) = 0$;

3) $(x^2 + 6x)(\sqrt{x} - 4)(x^2 - 8x - 48) = 0$.

898. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} = 0$;

2) $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$;

3) $\sqrt{25 - x^2} + |x^2 + 8x - 20| = 0$.

899. Не вычисляя дискриминант, найдите, при каком значении a уравнение:

1) $x^2 + 22x + a = 0$;

2) $x^2 - ax + 81 = 0$

имеет единственный корень. Найдите этот корень.

900. При каком значении b корнями уравнения $x^2 + bx - 23 = 0$ являются противоположные числа? Найдите эти корни.

901. Число $-\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $12x^2 - bx + 5 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

902. Число $0,2$ является корнем уравнения $8x^2 - 3,2x + k = 0$. Найдите значение k и второй корень уравнения.

903. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - bx + 20 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 5x_2$. Найдите значение b и корни уравнения.

904. Составьте квадратное уравнение, корни которого меньше соответствующих корней уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$ на 1.

905. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 7x}{x+1} = \frac{8}{x+1}$;

5) $\frac{63}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{7}{x}$;

2) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;

6) $\frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x+4} = \frac{4x-2}{(x+4)(x-2)}$;

3) $\frac{4-x}{4x-3} = \frac{2x-2}{7-x}$;

7) $\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x^2 - 4} = \frac{x+4}{5x(2-x)}$;

4) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-6} = \frac{7}{12}$;

8) $\frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{3}{x^2 + x + 1}$.

906. Решите уравнение:

1) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x+5}{x-1} = \frac{10}{3}$;

3) $\frac{x^2}{(3x-1)^2} - \frac{4x}{3x-1} - 5 = 0$;

2) $\frac{x^2 - 3x + 6}{x} + \frac{2x}{x^2 - 3x + 6} = 3$;

4) $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

907.* При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - 2ax + 3}{x-2} = 0$ имеет единственный корень?

908. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если число m является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то число $-m$ является корнем уравнения $ax^2 - bx + c = 0$;

2) если число m является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, то число $\frac{1}{m}$ является корнем уравнения $cx^2 + bx + a = 0$?

909.* Найдите все целые значения b , при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx - 6 = 0$;

2) $x^2 + bx + 21 = 0$.

910.* Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$. При каком значении a выполняется равенство $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

- 911.* При каком значении a произведение корней уравнения $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$ равно 15?
912. Автобус должен был проехать 255 км. Проехав $\frac{7}{17}$ пути, он остановился на 1 ч, а затем продолжил движение со скоростью на 5 км/ч меньше начальной. Найдите начальную скорость автобуса, если в пункт назначения он прибыл через 9 ч после выезда.
913. В слитке сплава меди и цинка содержится 20 кг цинка. К этому слитку добавили 3 кг меди и 4 кг цинка. Процентное содержание меди в полученном сплаве на 5 % больше, чем в исходном. Сколько килограммов меди содержал исходный сплав?

ДРУЖИМ С КОМПЬЮТЕРОМ

В предыдущих классах вы уже использовали компьютер при изучении математики. Вы научились:

- пользоваться **калькулятором** для вычислений;
- набирать и оформлять несложные тексты в **текстовом редакторе** (например, *Microsoft Word*);
- составлять таблицы с помощью **редактора таблиц** (например, *Microsoft Excel*);
- рисовать с помощью **графического редактора** (например, *Paint*);
- пользоваться глобальной сетью **Интернет** и искать в ней информацию.

Все эти умения вы будете совершенствовать и далее.

Если вы хотите в будущем стать математиком, программистом, инженером, то есть широко использовать математику в своей профессии, то советуем вам осваивать специализированные математические пакеты, которые помогают школьникам и студентам выполнять техническую работу при решении задач. Это, например, *MathLAB*, *MathCAD*. Также полезно освоить графический редактор, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть *CorelDraw*, *Visio* и т. п. Если вы собираетесь выступить с докладом или интересным сообщением, то сделать его более наглядным помогут **программы для создания презентаций** (например, *PowerPoint*).

Кроме этого, существует много программ, созданных специально для школьников и предназначенных для помощи в изучении математики. Вы сможете найти их на просторах Интернета.

А может, вы и сами придумаете полезные программы для изучения математики?

Более 70 лет в нашей стране действует Малая академия наук Украины (МАН), в научных отделениях и многочисленных секциях которой учащиеся могут заниматься исследовательской и практической работой по самым разнообразным направлениям. Вы можете участвовать в работе ее секций и внешкольном обучении, турнирах и конкурсах профессионального мастерства, всеукраинских ученических олимпиадах по базовым и специальным дисциплинам, представлять свои работы на Всеукраинском конкурсе-защите научно-исследовательских работ учащихся — членов МАН.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Некоторые из них — продолжение и развитие упражнений этого учебника (такие упражнения в тексте учебника помечены значком «■»); а здесь указан номер соответствующего упражнения).

Задания, требующие использования калькулятора, выполняйте с помощью микрокалькулятора или стандартной программы «калькулятор», которая есть на вашем компьютере.

Тем, кто интересуется информатикой, предлагаем задания на составление алгоритмов и программ, в которых можно использовать полученные математические знания. Эти задания отмечены звездочкой. Пока вы не изучили на нужном уровне какой-либо язык программирования, достаточно придумать алгоритм и записать его словами либо в виде блок-схемы. Кстати, умение составлять алгоритмы (последовательности действий) пригодится вам не только в программировании, но и в других областях деятельности.

К п. 1 «Рациональные дроби»

Научитесь вычислять значения дробных выражений с помощью калькулятора. В каких случаях невозможно вычислить значение дробного выражения? Всегда ли можно получить точное значение дробного выражения?

2–4. Выполните какие-нибудь из этих заданий с помощью калькулятора или специализированного математического пакета.

К п. 2 «Основное свойство рациональной дроби»

46, 47. Выберите какой-либо пример из этих заданий. Найдите значение выражения дважды: сначала записанного в условии выражения, затем — предварительно сократив дробь. Вычисления выполняйте с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета. Насколько уменьшилось количество действий после сокращения дроби? Можно ли после сокращения выполнить вычисления устно?

63. Постройте график функции с помощью графического редактора. Какой инструмент нужен, чтобы из графика функции $y = 2x$ получить график функции $y = 2x - 1$?

К п. 3 «Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями»

74, 75. Выберите какой-либо пример из этих заданий. Найдите значение выражения дважды: сначала записанного в условии

выражения, затем — предварительно упростив его. Вычисления выполняйте с помощью калькулятора либо специализированного математического пакета. Насколько уменьшилось количество действий после упрощения выражения? Можно ли после упрощения выполнить вычисления устно?

К п. 4 «Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями»

138. Выполните это задание также с помощью калькулятора. Всегда ли получится «удобный» результат?

К п. 5 «Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень»

160, 161. Выполните какие-либо примеры из этих заданий с помощью калькулятора. Какой вывод можно сделать о вычислениях с дробями, выполненных при помощи компьютера?

К п. 6 «Тождественные преобразования рациональных выражений»

194, 195. Докажите утверждение задачи 194, выполнив вычисления с помощью калькулятора. Какой путь доказательства оказался более наглядным? Можно ли с помощью калькулятора доказать утверждение задачи 195?

К п. 7 «Равносильные уравнения. Рациональные уравнения»

222. Решите эту задачу с помощью калькулятора.

К п. 8 «Степень с целым отрицательным показателем»

Существует ли в калькуляторе и в других программах, которыми вы пользуетесь для вычислений, способ представления числа в стандартном виде? Освойте этот инструмент.

* Ознакомьтесь с разными типами данных, которые предлагает выбранный вами язык программирования для представления дробных чисел. Как хранятся эти данные в памяти компьютера? Как влияет способ хранения на точность, с которой представлены эти данные?

262–264. Выполните какое-либо из этих заданий, создав таблицу в табличном редакторе. Используйте средства автоматической сортировки. Постройте на основании полученной таблицы диаграмму. Насколько наглядной она получилась? Почему?

266. Решите эту задачу с помощью калькулятора. Чем эта задача похожа на задачу 222 и чем отличается от нее? Какие общие элементы решения вы использовали для обеих задач?

* Постройте общий алгоритм для решения задач 222 и 266. Предусмотрите возможность использования этого алгоритма для произвольного количества лет.

К п. 9 «Свойства степени с целым показателем»

276. Вычислите значение какого-либо выражения из примеров 5–8 этого задания, выполняя действия с помощью калькулятора в том порядке, в котором они записаны в примере (без предварительного упрощения). Получили ли вы тот же результат, что и при решении примера на бумаге? Почему результаты могут различаться? Какой вывод из этого можно сделать?

293, 294. Каким образом использование стандартного вида числа упрощает вычисления?

* Узнайте, каким образом в памяти компьютера хранятся данные в формате «с плавающей точкой»; по каким алгоритмам выполняются действия с такими числами; как этот способ представления данных влияет на точность вычислений.

307. Постройте искомую таблицу с помощью табличного редактора. Сделайте так, чтобы значения функции вычислялись автоматически.

К п. 10 «Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график»

315, 316. Заполните искомую таблицу с помощью табличного редактора. Постройте с помощью средств табличного редактора график функции, которая является математической моделью задачи. Как надо усовершенствовать таблицу, чтобы получить более точный график?

К п. 11 «Функция $y = x^2$ и ее график»

357–360. Выберите какую-либо функцию из этих заданий и постройте ее график двумя способами. *Первый способ:* определите, из каких геометрических фигур состоит этот график, и изобразите эти фигуры на координатной плоскости с помощью графического редактора. *Второй способ:* составьте таблицу, содержащую набор значений аргумента и соответствующих им значений функции, и постройте график на основании этой таблицы с помощью соответствующих инструментов автоматического

построения графиков; для этого способа выберите внешний вид графика, в котором заданные точки соединяются отрезками. Какой график более точно изображает заданную функцию? Как надо учесть особенности этой функции при выборе множества значений аргумента для таблицы?

К п. 12 «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень»

Научитесь извлекать квадратный корень с помощью калькулятора и других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

398. Выполните задание двумя способами: 1) упростив выражение на бумаге; 2) вычислив его значение с помощью калькулятора без предварительного упрощения. Сделайте выводы.

*** 421.** Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К п. 13 «Множество и его элементы. Подмножество»

Найдите с помощью Интернета какие-нибудь интересные факты и опишите их, используя слова «множество», «элемент множества», «подмножество», «пустое множество». Задайте какие-либо из этих множеств с помощью перечисления элементов и с помощью задания характеристического свойства.

К п. 14 «Числовые множества»

Для каждого из числовых множеств введите в калькуляторе несколько элементов этого множества. Любое ли рациональное число вы можете ввести со всеми его цифрами? Можно ли ввести иррациональное число? Насколько точно представляет калькулятор эти числа? Сделайте вывод.

Как в калькуляторе можно задать число π ?

Придумайте пример выражения, в котором переменные будут рациональными числами, которые можно задать точно, а результатом будет действительное или иррациональное число, которое калькулятор отображает приближенно. Вычислите значение этого выражения с помощью калькулятора.

***** Сделайте выводы: когда операции с действительными числами могут не давать ожидаемого результата? Как в таких случаях надо добиваться желаемого результата?

450, 451. Выполните задание с помощью калькулятора и/или других программ, которыми вы пользуетесь для вычислений.

К п. 15 «Свойства арифметического квадратного корня»

483 (6), 495. Выполните вычисления с помощью калькулятора, не упрощая предварительно выражение. Какой способ решения оказался проще — на бумаге или с помощью калькулятора?

К п. 16 «Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни»

Вычислите значения нескольких выражений, приведенных в задачах 515, 516, 529, с помощью калькулятора без предварительного упрощения выражений. Будет ли получен точный результат?

К п. 17 «Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график»

С помощью табличного редактора постройте таблицу, содержащую набор аргументов и соответствующих им значений функции $y = \sqrt{x}$. Постройте график на основании этой таблицы.

К п. 18 «Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений»

* Запишите алгоритм для решения неполных квадратных уравнений в зависимости от их вида.

* **629.** Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К п. 19 «Формула корней квадратного уравнения»

* Запишите алгоритм, который по коэффициентам a , b и c уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находит его корни. Какие частные случаи надо рассмотреть?

* **643, 644.** Запишите алгоритмы для решения этих задач методом перебора. Какая информация в условиях этих задач позволяет сделать вывод, что тут, в отличие от задач 653 и 654, можно применить метод перебора?

К п. 20 «Теорема Виета»

Придумайте два числа, десятичная запись каждого из которых содержит несколько цифр до и после запятой. Используя следствие из теоремы, обратной теореме Виета, составьте квадратное уравнение, для которого данные числа являются корнями. Решите это уравнение. Для вычислений используйте калькулятор.

К п. 21 «Квадратный трехчлен»

* Запишите алгоритм для разложения квадратного трехчлена на линейные множители.

* 746. Создайте математическую модель для решения этой задачи в общем виде.

* 749. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

К п. 22 «Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям»

* Запишите алгоритм для решения биквадратных уравнений. Можно использовать в качестве подпрограммы алгоритм, составленный вами для решения квадратного уравнения (см. задание к п. 19).

* 776. Запишите алгоритм для решения этой задачи методом перебора.

В течение учебного года в рубрике «Дружим с компьютером» вам было предложено много заданий для решения методом перебора. Проанализируйте эти задания и сделайте вывод, почему по-английски метод перебора называется «brute force».

К п. 23 «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций»

* Можно ли для различных задач этого пункта создать одну и ту же математическую модель? Попробуйте найти такие задачи и составить общий алгоритм для их решения.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выражения с переменными. Целые рациональные выражения. Числовое значение выражения

- ✓ Выражение, составленное из переменных, чисел, знаков арифметических действий и скобок, называют выражением с переменными (или с переменной, если она одна).
- ✓ Если вместо переменных (переменной) подставить в выражение их значения, то получим числовое выражение, значение которого называют значением выражения с переменными при данных значениях переменных.
- ✓ Числовые выражения и выражения с переменными называют алгебраическими выражениями.
- ✓ Выражения с переменными, не содержащие деления на выражения с переменными, называют целыми выражениями.

2. Тожественно равные выражения. Тожества

- ✓ Выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.
- ✓ Равенство, верное при любых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.
- ✓ Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют тождественным преобразованием.
- ✓ Доказать тождество — это значит доказать, что данное равенство является тождеством.
- ✓ Для доказательства тождеств используют следующие приемы (методы):
 - тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть;
 - тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение;
 - показывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

Чтобы доказать, что равенство не является тождеством, достаточно привести контрпример: указать такие значения переменных (переменной), при которых данное равенство не выполняется.

3. Степень с натуральным показателем

- ✓ Степенью числа a с натуральным показателем n , большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a .
- ✓ Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.
- ✓ Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: « a в n -й степени». Степени с показателями 2 и 3 можно прочесть иначе: запись a^2 читают « a в квадрате», запись a^3 — « a в кубе».
- ✓ При возведении неотрицательного числа в степень получаем неотрицательное число.
- ✓ При возведении отрицательного числа в степень с четным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечетным показателем получаем отрицательное число.

4. Свойства степени с натуральным показателем

- ✓ Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

то есть при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, а основание оставляют тем же.

- ✓ Для любого числа a , отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

то есть при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют тем же.

- ✓ Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

то есть при возведении степени в степень показатели перемножают, а основание оставляют тем же.

- ✓ Для любых чисел a и b и любого натурального числа n выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

то есть при возведении произведения в степень каждый множитель возводят в степень и полученные результаты перемножают.

5. Одночлены

- ✓ Выражения, являющиеся произведениями чисел, переменных и их степеней, называют одночленами.
- ✓ Одночлен, который содержит только один отличный от нуля числовой множитель, стоящий на первом месте, и у которого все остальные множители — степени с разными основаниями, называют стандартным видом одночлена. К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени.
- ✓ Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, называют нуль-одночленами. Их не относят к одночленам стандартного вида.
- ✓ Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.
- ✓ Одночлены, имеющие одинаковые буквенные части, называют подобными.
- ✓ Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Степень одночлена, являющегося числом, отличным от нуля, принимают равной нулю.
- ✓ Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.
- ✓ Произведением двух одночленов является одночлен. При возведении одночлена в степень получают также одночлен.

6. Многочлены

- ✓ Выражение, являющееся суммой нескольких одночленов, называют многочленом.
- ✓ Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами многочлена.
- ✓ Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом, а состоящий из трех членов — трехчленом. Одночлен является частным случаем многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.
- ✓ Если среди одночленов, из которых состоит многочлен, есть подобные, то их называют подобными членами многочлена.
- ✓ Многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных, называют многочленом стандартного вида.
- ✓ Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых этот многочлен составлен.

- ✓ Чтобы сложить два многочлена, надо каждый из них заключить в скобки и поставить между ними знак «+», затем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).
- ✓ Чтобы из одного многочлена вычесть другой, надо каждый из них заключить в скобки, поставить перед вычитаемым знак «-», затем раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).
- ✓ Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют разложением многочлена на множители.

7. Умножение одночлена на многочлен

- ✓ Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

8. Умножение многочлена на многочлен

- ✓ Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.
- ✓ При умножении многочлена на многочлен всегда получается многочлен.

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

9. Произведение разности и суммы двух выражений

- ✓ Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

10. Разность квадратов двух выражений

- ✓ Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

11. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

- ✓ Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- ✓ Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

12. Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений

- ✓ Формулы

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

позволяют «свернуть» трехчлен в квадрат двучлена.

- ✓ Трехчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют полным квадратом.

13. Сумма и разность кубов двух выражений

- ✓ Многочлен $a^2 - 2ab + b^2$ называют неполным квадратом разности.
- ✓ Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

- ✓ Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют неполным квадратом суммы.
- ✓ Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

УРАВНЕНИЕ

14. Корень уравнения

- ✓ Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.
- ✓ Решить уравнение — это значит найти все его корни или убедиться, что их не существует.
- ✓ При решении задач на составление уравнений удобно использовать такую схему:
 - 1) по условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);
 - 2) решить полученное уравнение;
 - 3) выяснить, соответствует ли найденный корень содержанию задачи, и дать ответ.

15. Свойства уравнений

- ✓ Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.
- ✓ Если данное уравнение не имеет корней, то, прибавив к обеим его частям одно и то же число, получим уравнение, также не имеющее корней.
- ✓ Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.
- ✓ Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

16. Линейное уравнение с одной переменной

- ✓ Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

ФУНКЦИИ

17. Функция. Область определения и область значений функции

- ✓ Правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной, называют функцией, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — функциональной.
- ✓ Обычно независимую переменную обозначают буквой x , зависимую — буквой y , функцию (правило) — буквой f . Если переменная y функционально зависит от переменной x , то этот факт обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).
- ✓ Независимую переменную еще называют аргументом функции.

- ✓ Значение зависимой переменной называют значением функции. Значение функции f , которое соответствует значению x_0 аргумента x , обозначают $f(x_0)$.
- ✓ Все значения, которые принимает аргумент, образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют область значений функции.

18. Способы задания функции

- ✓ Функцию считают заданной, если указаны ее область определения и правило, с помощью которого можно для каждого значения независимой переменной найти значение зависимой переменной.
- ✓ Способы задания функции: описательный, с помощью формулы, табличный, графический.
- ✓ Если функция задана формулой, правая часть которой — целое выражение, и при этом не указана область ее определения, то считают, что областью определения такой функции являются все числа.

19. График функции

- ✓ Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции f .
- ✓ Если какая-либо фигура является графиком функции f , то выполняются два условия:
 - 1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;
 - 2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 — соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f , то есть $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Фигура, изображенная на координатной плоскости, может быть графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки.

20. Линейная функция, ее график и свойства

- ✓ Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.

- ✓ Графиком линейной функции, область определения которой — все числа, является прямая.
- ✓ Линейную функцию, заданную формулой $y = kx + b$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.
- ✓ Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку $O(0; 0)$.
- ✓ Если в формуле $y = kx + b$ положить $k = 0$, то получим $y = b$. В этом случае значения функции будут оставаться неизменными при любых изменениях значений аргумента. График такой функции — прямая, параллельная оси абсцисс.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

21. Уравнение с двумя переменными

- ✓ Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.
- ✓ Решить уравнение с двумя переменными — это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.
- ✓ Свойства уравнений с двумя переменными аналогичны свойствам уравнений с одной переменной (см. п. 15 на с. 236).
- ✓ Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.
- ✓ Когда какая-либо фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:
 - 1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
 - 2) координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, являющаяся решением данного уравнения.

22. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0, a$ и c — любые	Невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0, a \neq 0, c$ — любое	Вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0, c \neq 0$	— (уравнение решений не имеет)

23. Системы уравнений с двумя переменными

- ✓ Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что надо решить систему уравнений.
- ✓ Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.
- ✓ Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающих каждое уравнение в верное равенство.
- ✓ Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или доказать, что решений не существует.

24. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

- ✓ Графический метод решения системы уравнений заключается в следующем:
 - построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
 - найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
 - полученные пары чисел и будут искомыми решениями.
- ✓ Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:
 - если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;

- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет.

25. Решение систем линейных уравнений методом подстановки

- ✓ Чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, следует:
 - 1) выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;
 - 2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;
 - 3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
 - 4) подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;
 - 5) вычислить значение второй переменной;
 - 6) записать ответ.

26. Решение систем линейных уравнений методом сложения

Чтобы решить систему линейных уравнений методом сложения, следует:

- 1) подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
- 2) сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;
- 3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
- 4) подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;
- 5) вычислить значение второй переменной;
- 6) записать ответ.

МОДУЛЬ ЧИСЛА

27. Модуль числа

- ✓ Модулем числа a называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.
- ✓ Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают: «модуль a »).

- ✓ Модуль положительного числа равен этому числу, модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.
 $|0| = 0$.

- ✓ С помощью фигурной скобки свойство модуля числа a можно записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

- ✓ Модуль числа принимает только неотрицательные значения.
- ✓ Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

28. Прямоугольная система координат

Проведем на плоскости две перпендикулярные координатные прямые так, чтобы их начала отсчета совпадали (рис. 37). Эти прямые называют осями координат, точку O их пересечения — началом координат. Горизонтальную ось называют осью абсцисс и обозначают буквой x , вертикальную ось называют осью ординат и обозначают буквой y .

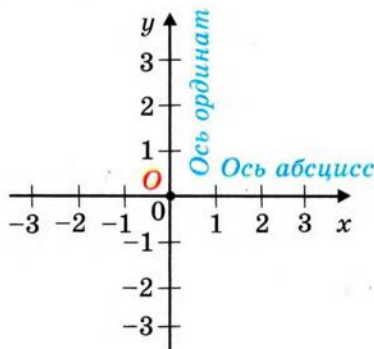


Рис. 37

- ✓ Ось абсцисс называют также осью x , а ось ординат — осью y , вместе они образуют прямоугольную систему координат. Такую систему координат называют декартовой.
- ✓ Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют координатной плоскостью.

- ✓ Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называют координатными четвертями и нумеруют так, как показано на рисунке 38.

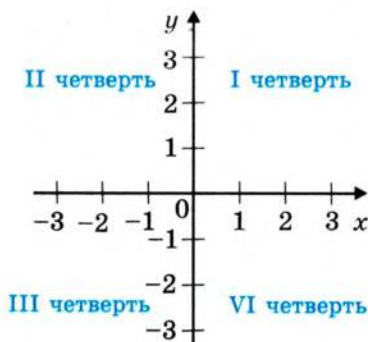


Рис. 38

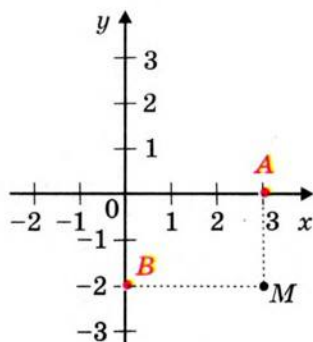


Рис. 39

На координатной плоскости обозначим точку M (рис. 39). Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно оси абсцисс, пересекает ее в точке A , а прямая, перпендикулярная оси ординат, пересекает эту ось в точке B . Точка A на оси x имеет координату 3, а точка B на оси y — координату -2 . Число 3 называют абсциссой точки M , число -2 — ординатой точки M . Числа 3 и -2 однозначно определяют положение точки M на координатной плоскости. Поэтому их называют координатами точки M и записывают так: $M(3; -2)$.

Записывая координаты точки, абсциссу всегда ставят на первое место, а ординату — на второе.

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю, а если точка лежит на оси ординат, то нулю равна ее абсцисса.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

50. 0,3. 51. 5. 53. $\frac{1}{32}$. 54. Нет. *Указание.* Представьте данную дробь в виде $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. 58. 1) x — любое число, кроме -1 ; 2) корней нет; 3) корней нет. 59. 1) Корней нет; 2) -7 . 60. 1) Если $a = 0$, то корней нет; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) если $a = 0$, то x — любое число; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) если $a = 6$, то x — любое число; если $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) если $a = -2$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое число; если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. 61. 1) Если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) если $a = 0$, то корней нет; если $a = 9$, то x — любое число; если $a \neq 0$ и $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$.
64. -4 при $a = 2b$. 65. 48 км/ч, 60 км/ч. 76. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. 77. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. 78. 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. 79. 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. 87. 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. 88. 2) -3 ; 3) $-4,5$. 89. 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. 90. 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. 91. 15 км/ч, 12 км/ч. 92. 1) -2 ; 2) корней нет. 112. 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. 113. 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. 116. 2) 4. 117. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. 118. 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. 121. 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. 122. 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. 124. 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$.
128. $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Указание.* Представьте каждое из слагаемых

в виде разности двух дробей. Например, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$.

129. $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. 132. Указание. К каждой из дробей, записанных

в левой части равенства, прибавьте 1, а к правой части прибавьте 3.

135. 270 км. 160. 1) -5; 2) 0,9; 3) -5; 4) -3,2. 161. 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$.

162. 83. 163. 10. 164. 7 или -7. 165. 2 или -2. 166. 1) 1; 2) 1.

167. 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. 170. 1) 0,5; 2) x — любое число. 172. 1, 2 ч.

173. 50 л, 30 л. 174. 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей. 178. 1) $\frac{3}{1-a}$;

2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. 179. 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) -1;

3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. 180. 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$.

181. 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) -2; 4) $\frac{y+2}{6}$. 184. 1) Не зависит; 2) зависит.

186. 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. 187. 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$.

188. 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$. 189. $-y$. 192. 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. 193. 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$.

195. Указание. Представьте данное выражение в виде $10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$.

196. 480 кг. 197. 500 грн, 700 грн. 198. 2 ч. 199. 90 деталей.

200. 9 воробьев, 10 голубей, 11 горлиц. 207. 2) Корней нет; 3) -2;

4) x — любое число, кроме 2; 5) x — любое число; 6) 3; 7) 0,5;

8) корней нет; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) -4; 4; 14) 0;

15) 4. 208. 1) -1; 2) корней нет; 3) 10; 4) корней нет; 5) 4; 6) x — любое число, кроме 0; 7) 6; 8) x — любое число, кроме -0,5; 9) -3;

3. 209. 7. 210. 10. 212. 1) $\frac{13}{4}$; 2) корней нет; 3) 7; 4) 0; -2; 5) кор-

ней нет; 6) -17; 7) 0; 8) корней нет. 213. 1) 10; 2) -0,5; 3) -3;

4) -4; 4; 5) корней нет; 6) -5. 214. 2 км/ч. 215. 29 км/ч. 216. 9 км/ч.

217. 1) Корней нет; 2) 9; 3) 0. 218. 1) 0,6; 2) 0. 219. 1) Если $a \neq 1$,

то $x = 1$; если $a = 1$, то корней нет; 2) если $a \neq -5$, то $x = a$; если $a = -5$, то корней нет; 3) если $a = 0$, то x — любое число, кроме 3; если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x = a$; если $a = 3$, то корней нет; 4) если $a \neq 7$, то $x = a$ или $x = 6$; если $a = 7$, то $x = 6$; 5) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x = 4$ или $x = -2$; если $a = 4$, то $x = -2$; если $a = -2$, то $x = 4$; 6) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x = a$; если $a = 4$ или $a = -2$, то корней нет. 220. $a = 2$ или $a = -2$. 221. $a = -9$, или $a = -3$, или $a = 0$.

222. 70 000 жителей. 223. 60 км. 251. 1) 2, 7; 2) $9\frac{47}{125}$. 258. 5. 259. 6.

265. 31 болванка. 266. 80 000 жителей. 267. 2 км. 280. 6) $-\frac{1}{6}$;

7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. 281. 5) 16; 6) 144. 291. 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0;

6) 2. 292. 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. 295. 8 мин. 296. 5,34 кг.

297. В 81 раз. 298. 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$.

299. 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. 300. 1) -1 или 0; 2) 3 или 4; 3) 4 или 5;

4) 2 или 3. 301. 1) 6 или 7; 2) 4 или 5; 3) 4 или 5; 4) 4 или 5. 302. 28;

8. 303. На 31,6 %. 304. 5 ч 45 мин. 305. Да, надо 5 купюр по 5 грн и 3 купюры по 2 грн. 331. 1) 2; 2) -1; 3) 3) корней нет. 332. 1) 2;

4; 2) -1; 1; 3) корней нет. 345. Корней нет. 346. Уменьшилась на 9 %.

347. 36 монет, 24 монеты. 348. 12 км/ч. 353. 1) Корней нет;

2) -1; 3) 3) 2. 354. 1) -3; -1; 2) корней нет; 3) -1. 369. 4.

371. 5 км/ч, 3 км/ч. 397. 1) -10; 2) 25; 3) -23,8; 4) 13; 5) 216;

6) -20. 398. 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. 399. 2) $x \leq 0$; 3) x — любое чис-

ло; 4) $x = 0$; 5) $x \geq 8$; 6) $x \leq 8$; 9) x — любое число, отличное от 8;

10) $x \geq 0$ и $x \neq 9$; 11) $x \geq 0$; 12) $x = 0$; 13) такого значения x не

существует; 14) x — любое число; 15) $x = 0$; 16) x — любое число, отличное от 0. 400. 2) $y \leq 0$; 3) $y \geq 0$; 4) $y \leq 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$;

7) $y \geq 0$ и $y \neq 1$. 401. 6) -10; 10. 402. 4) -7; 7. 405. 1) 167; 2) 2116;

3) корней нет. 406. 1) 4900; 2) корней нет. 407. 1) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b — числа одного знака; если $a = 0$, то b — любое число; если $b = 0$, то a — любое число; 3) если $b \neq 0$, то $a \geq 0$; если

- $b = 0$, то a — любое число; 5) если $a \neq 0$, то $b \leq 0$; если $a = 0$, то b — любое число. 408. 2) Указание. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. 409. Указание. $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. 410. Выражение 2. 411. 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) -2; 5) -1; 1; 6) 1. 412. 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) 3. 413. 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. 416. 1) Если $a = 0$, то $x \geq 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) если $a = 1$, то x — любое число; если $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) если $a = 0$, то $x \geq 1$; если $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geq 0$, то $x = a^2 + 2$.
417. $a < 0$ или $a = 1$. 418. 13. 419. $\frac{a+10}{5-a}$. 420. 27 купюр по 100 грн, 4 купюры по 500 грн. 428. 2) $\{-2, 2\}$; 4) $\emptyset$. 429. 4) $\{5\}$. 439. 1) $\frac{5b+15}{b}$; 2) $\frac{3}{1-b}$. 440. 1,4 км/ч. 441. $\frac{2}{7}$. 457. Указание. Пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — данные рациональные числа. Тогда их сумма равна $\frac{mq+np}{nq}$, то есть является числом вида $\frac{s}{t}$, где $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. 458. Указание. Если предположить, что данная сумма является рациональным числом, то из этого следует, что данное иррациональное число можно представить в виде разности двух рациональных чисел. 459. 1) Нет, например, $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$; 2) нет, например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; 3) нет, например, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. 460. В третьем подъезде на шестом этаже. 461. $\frac{b^2}{a}$. 463. 18 л. 493. 1) Ни при каком значении x ; 2) 3; 3) -1; 3. 494. 1) -4; 2) 2. 495. -4. 496. 120 га. 525. 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. 526. 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. 528. 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. 529. 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. 536. 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c+5}}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. 537. 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$;

- 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. 538. 1) $m^4\sqrt{-m}$;
 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$;
 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. 539. 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$;
 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$.
 540. 2) Поскольку из условия следует, что $b \leq 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$;
 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. 541. 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$.
 543. 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$; 2) $\sqrt{a}$. 544. 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$.
 545. 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. 546. 9. 549. 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$.
 550. 180 деталей. 551. На 25 %. 552. 6 км/ч, 2 км/ч. 553. 17 вагонов.
 571. 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) корней нет; 4) 1; 5) 4; 6) 1.
 573. 4) $5-2\sqrt{3}$. 574. 2) $-\sqrt{2}$. 575. 0. Указание. Левая часть этого уравнения принимает только неотрицательные значения, а правая — только неположительные.
 580. 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. 581. 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. 582. Если $a \geq 0$, то один корень; если $a < 0$, то корней нет. 583. $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leq a \leq 1$. 584. 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leq a \leq 36$. 585. 63 кг.
 586. 3 км/ч. 588. 1 ч 12 мин. 605. 6; 7. 606. 9; 10. 608. 1) 0; 14;
 2) корней нет. 609. 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. 615. -3; -2 или 3; 4.
 616. -1; 0 или 0; 1. 617. 1) 4; 2) 0; -8; 3) -9; 9. 622. 1) 0; -3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2; 2. 623. 1) 0; 7; -7; 2) 0; 5; -7; 3) -1,5; 1,5.
 624. 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; -2; 4) такого значения не существует.
 625. 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ или $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. 629. 35. 636. 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. 637. 1) 2; $-\frac{7}{3}$;
 2) -3; $\frac{1}{7}$; 638. 1) 4; -3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6;
 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. 639. 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) корней нет. 640. 7. 641. 38 см.

642. 6 и 14 или -14 и -6. 643. 10; 11. 644. 13; 14. 645. 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$;
 2) -1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{31}{22}$. 646. 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1;
 $\frac{3}{8}$. 647. -20; 4. 648. 1; $-\frac{4}{2}$. 649. 8 см. 650. 6 см или 12 см. 651. 16 см,
 30 см. 652. 9 см, 40 см. 653. 9; 11; 13. 654. 4; 6; 8; 10. 656. 16 обезьян или 48 обезьян. 657. 9 команд. 658. 15 сторон. 659. 1) -8; -7;
 0; 1; 2) -1; 1; 0,6; -0,6; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) -2; 2; 5) 3; 5; -3; -5; 6) 2; -2.
 660. 1) -12; 2; -2; -8; 2) 3; 3) 15; $-7\pm\sqrt{34}$; 4) 9; -9. 661. 1) -10;
 2) 3. 662. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. 663. 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ или $b = 12$.
 664. 1) $b = 13,5$; 2) $b = -8$ или $b = 8$. 668. 1) $x = -2a - 1$ или $x = -a$;
 2) $x = 2a$ или $x = 4$; 3) если $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ или $x = -\frac{1}{a}$; если $a = 0$,
 то корней нет; 4) если $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$; если $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ или
 $x = \frac{1}{2a-1}$. 669. 1) $x = 3a - 5$ или $x = -a$; 2) $x = -3a$ или $x = 4$;
 3) если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$ или $x = \frac{1}{a}$. 670. 1) $b = 0$
 или $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$, или $b = 2\sqrt{6}$, или $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$.
 671. 1) $b = 0$, или $b = -0,5$, или $b = 0,5$; 2) $b = -3$ или $b = -5$.
 672. $\frac{a-b}{a}$. 673. 9. 674. 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. 675. 45 т, 75 т. 676. 14 листов.
 690. $x_2 = 10$, $q = -20$. 691. $x_2 = -6$, $p = -1$. 692. $x_2 = 2$, $b = 14$.
 693. $x_2 = 1,6$, $m = -1,28$. 694. -20,5. 695. -7. 696. $\sqrt{17}$; $-\sqrt{17}$.
 700. $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. 701. $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. 702. $x_1 = 9$,
 $x_2 = -2$, $m = -18$. 703. $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. 706. 1) 1,5; 2) 69.
 Указание. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. 707. 1) 80;
 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. Указание. $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. 708. $x^2 + 12x +$
 $+ 17 = 0$. 709. $x^2 - 18x + 49 = 0$. 710. $6x^2 - 14x + 3 = 0$. 711. $x^2 - 15x +$

- + 8 = 0. **712.** $a = 2$ или $a = -2$. **713.** $a = 6$ или $a = -6$. **715.** 1) 7; -7; 5; -5; 2) -11; 11; -1; 1; -4; 4. **716.** 1) -9; 9; -6; 6; 2) -17; 17; -7; 7; -3; 3. **717.** $b = c = 0$ или $b = 1, c = -2$. **718.** 1) $a = 2$; 2) такого значения a не существует. **719.** $a = 2$. **721.** 4 ряда по 12 деревьев. **723.** 18 %. **732.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **733.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **734.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **735.** 1) -4; 2) -14. **736.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **740.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n) \times (m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **741.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c) \times (4b+3c)$. **742.** 1) Если $a = 3$, то x — любое число; если $a = -2$, то корней нет; если $a \neq 3$ и $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) если $a = 7$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq 7$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **743.** Если $a = -8$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет; если $a \neq -8$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **746.** 6,8 %. **748.** 1) Корней нет; 2) -4; 3) 3; 4) y — любое действительное число, отличное от -4 и от 5. **752.** 1) -4; 1; 2) -1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) -2; 10; 5) 7; 6) -6; 7) -5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) -2; 9; 11) -3; 2; 12) 4; -0,4. **753.** 1) -1; 2) -0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) -3; 6) -3; 12; 7) -1; $\frac{2}{7}$; 8) -3; 13. **758.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **759.** 1) 10; 2) -7. **760.** 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) -23; 1; 3) -27; -1; 4) 3. **761.** 1) 4; 9; 2) 5. **762.** 1) -1; 18; 2) -98; 2; 3) -1,5; 4) -2; 5) -3; 4; 6) -3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **763.** 1) -60; 50; 2) -3; 3) -9; 24; 4) 2; 5) -20; 2; 6) 15. **764.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) -56; 60. **765.** 1) -15; 12; 2) -20; 2. **766.** 1) -5; 2) корней нет; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **767.** 1) -15; 1; 2) 1,5. **768.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3; 3; 2) -6; -4; -1;

- 1; 3) 0; 3; 4) -1; -3; 1. **769.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **770.** 1) -1; 7; 2; 4; 2) -6; -2; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) -2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **771.** 1) Если $a = 1$, то $x = 7$; если $a = 7$, то $x = 1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = 1$ или $x = 7$; 2) если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x = a$; если $a = 1$ или $a = 7$, то корней нет; 3) если $a \neq 2$ и $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ или $x = 2$; если $a = 2$ или $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) если $a = 0$, то x — любое число, отличное от -3; если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x = a$. **772.** $a = 2\sqrt{5}$, или $a = -2\sqrt{5}$, или $a = 6$. **777.** 75 км/ч. **778.** 50 км/ч, 60 км/ч. **779.** 80 км/ч, 60 км/ч. **780.** 80 км/ч. **781.** 12 км/ч. **782.** 12 страниц. **783.** 30 м³, 25 м³. **784.** 6 дней. **785.** 31 км/ч. **786.** 10 км/ч. **787.** 3 км/ч. **788.** 2 км/ч или 2,25 км/ч. **789.** 60 км/ч, 40 км/ч. **790.** 60 км/ч. **791.** 60 км/ч. **792.** 8 км/ч. **793.** 32 км/ч. **794.** $\frac{1}{4}$. **795.** $\frac{7}{12}$. **796.** 45 дней, 36 дней. **797.** 15 ч, 10 ч. **798.** 21 ч, 24 ч. **799.** 80 г. **800.** 30 кг. **801.** 3 км/ч. **802.** 5 ч. **803.** 4 ч, 6 ч, 12 ч. **804.** 80 км/ч. **805.** 24 детали. **806.** 12 ч. **808.** 6. **823.** 3) $\frac{8}{3}$. **829.** 4) 1, 2, 3. **832.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **833.** Указание. Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства. **886.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **909.** 1) -5; 5; -1; 1; 2) -10; 10; -22; 22. **910.** $a = 1$. **911.** $a = 3$.

**Ответы к упражнениям к рассказу
«Решение уравнений методом замены переменной»**

- 1) -1; 1; 2; 4; 2) -3; 0; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 3) $-4 \pm \sqrt{21}$; 4) -6; -4; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 2; 6) 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$; 7) 3; 7.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ» В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

Номер задания	Номер задачи											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	А	А	Г	А	В	Г	В	Г	Б	В
2	Б	Г	Б	Г	А	А	В	Б	В	Б	В	А
3	В	Г	В	Б	В	А	Б	Б	Г	А	А	Г
4	В	Б	Б	В	В	А	В	Г	В	В	А	Б
5	В	Г	Г	В	А	Б	А	Б	А	Г	Б	А
6	Г	В	А	Б	А	В	А	В	А	Г	Б	В

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Вершина параболы 92

Ветвь гиперболы 77

— параболы 92

Внесение множителя под знак
корня 131

Вынесение множителя из-под
знака корня 131

Выражения дробные 5

— рациональные 5

— целые 5

Гипербола 77

Графический метод решения
уравнений 79

Диаграмма Эйлера 111

Дискриминант квадратного
уравнения 161

— — трехчлена 179

Допустимые значения перемен-
ных 6

Дробь бесконечная непериоди-
ческая десятичная 116

— — периодическая десятич-
ная 115

— рациональная 6

Знак квадратного корня 97

Извлечение квадратного корня
97

Корень квадратный 97

— — арифметический 97

— квадратного трехчлена 179

Коэффициенты уравнения пер-
вой степени 153

Метод замены переменной 185

Множество 108

— действительных чисел 117

— натуральных чисел 114

— пустое 110

— рациональных чисел 114

— целых чисел 114

Обратная пропорциональность
76

Общая мера 123

Общий знаменатель 26

Освобождение от иррациональ-
ности в знаменателе дроби
133

Основное свойство рациональ-
ной дроби 11

Парабола 92

Период дроби 115

Подкоренное выражение 97

Подмножество 110

Порядок числа 60

Приближенное значение числа
118

Радикал 97

Разложение квадратного трех-
члена на линейные множи-
тели 179

Равные множества 109

- С**войства арифметического квадратного корня 124
- степени с целым показателем 67
- Соизмеримые отрезки 123
- Сокращение дроби 11
- Стандартный вид числа 60
- Степень с нулевым показателем 60
- с целым отрицательным показателем 59
- Т**еорема Виета 170
- , обратная теореме Виета 171
- Тождественно равные выражения 10
- Тождество 10
- Трехчлен квадратный 179
- У**равнение биквадратное 185
- квадратное 154
 - — приведенное 154
 - — неполное 154
 - линейное 153
 - первой степени 153
 - рациональное 51
 - третьей степени 193
 - четвертой степени 193
- Уравнения равносильные 51
- Ф**ормула корней квадратного уравнения 162
- Х**арактеристическое свойство 109
- Ч**исла действительные 119
- иррациональные 116
 - натуральные 114
 - рациональные 114
 - целые 114
- Э**лемент множества 108

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Условные обозначения	4
§ 1. Рациональные выражения	5
1. Рациональные дроби	5
2. Основное свойство рациональной дроби	10
3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями	20
4. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями	25
Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме	34
5. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень	35
6. Тождественные преобразования рациональных выражений	42
Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме	49
7. Равносильные уравнения. Рациональные уравнения	50
8. Степень с целым отрицательным показателем	59
9. Свойства степени с целым показателем	67
10. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	75
Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме	86
Главное в параграфе 1	88
§ 2. Квадратные корни. Действительные числа	91
11. Функция $y = x^2$ и ее график	91
12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	96
• Растут ли в огороде радикалы?	106
• Первая задача первой математической олимпиады в Украине	107
13. Множество и его элементы. Подмножество	108

14. Числовые множества	114
• Открытие иррациональности	122
15. Свойства арифметического квадратного корня	124
16. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни	131
17. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график	142
<i>Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	<i>150</i>
<i>Главное в параграфе 2</i>	<i>151</i>
§ 3. Квадратные уравнения	153
18. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений	153
19. Формула корней квадратного уравнения	160
20. Теорема Виета	170
<i>Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	<i>178</i>
21. Квадратный трехчлен	179
22. Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям	185
• Решение уравнений методом замены переменной	191
• Секретное оружие Сципиона дель Ферро	194
23. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	195
• Первая ЭВМ в Европе	202
<i>Задание № 6 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	<i>204</i>
<i>Главное в параграфе 3</i>	<i>206</i>
Упражнения для повторения курса алгебры 8 класса	208
• Дружим с компьютером	224
Сведения из курса алгебры 7 класса	231
Ответы и указания к упражнениям	243
Ответы к заданиям «Проверьте себя» в тестовой форме	251
Предметный указатель	252

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

График функции $y = \frac{k}{x}$

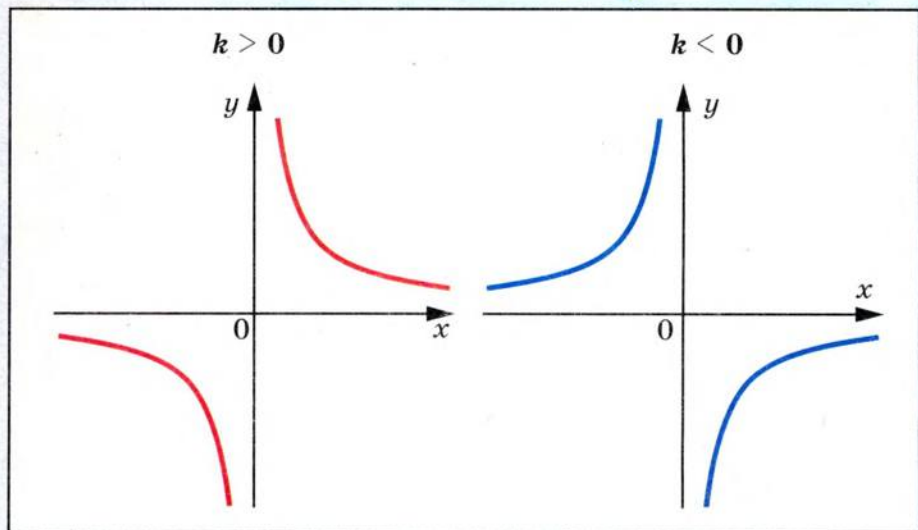


График функции $y = x^2$

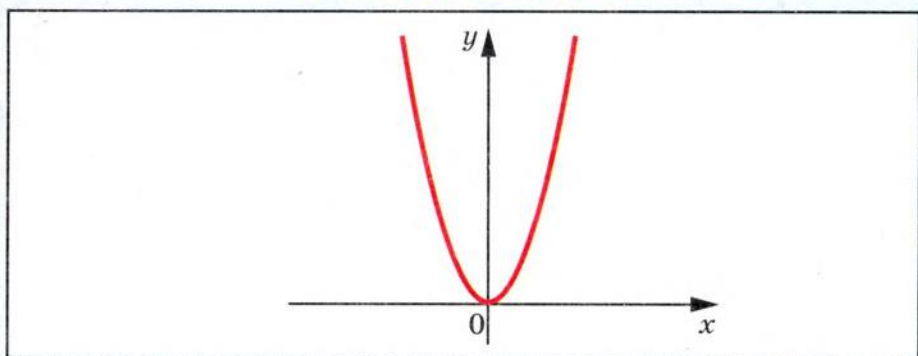
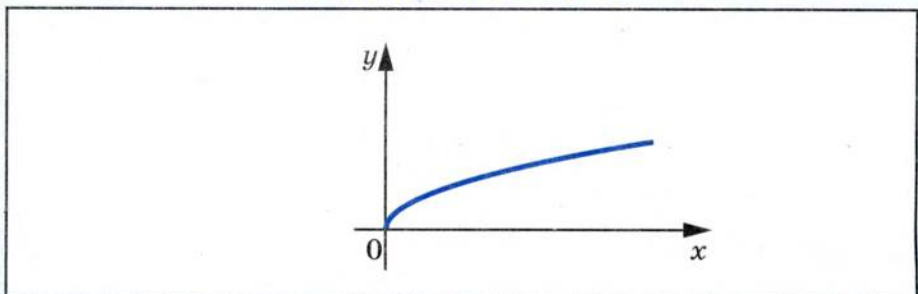


График функции $y = \sqrt{x}$



Издательство «Гимназия» предлагает
учебно-методический комплект
по алгебре для 8 класса



9 789664 742815

ООО ТОВ «Гимназия»

61052 Харьков, ул. Восьмого Марта, 31
тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, 719-46-80,
факс: (057) 758-83-93

e-mail: contact@gymnasia.com.ua

www.gymnasia.com.ua